

HACIA UN MODELO KEYNESIANO GENERALIZADO PARA EL SIGLO XXI DESDE LA GENERAL THEORY

Antonio Mora Plaza

Economista, Madrid

https://doi.org/10.33676/EMUI_nomads.58.06

Towards a general keynesian model for the 21st century from the General Theory

Abstract: The intention of this work is to update the Keynesian model from its origin, from General Theory, for this century after -and I would say the whole planet to a greater or lesser extent- the most important recession happened since the Great Depression of 29 of the last century the Western World. The opportunity and the necessity -which can always be understood as opportunistic- is due to the fact that neoliberal prescriptions, when there have been them, to address the depression that began in 2007 or 2008 - according to criteria- has been failed or simply have not been. The market, the markets for themselves have not avoided the causes of depression and have not solved -by action or simply by inaction- the consequences. The opportunity to renew Keynesian and Kaleckian discourse is remarkable although, as a theoretical work that is intended here, it is not a conjunctural analysis of the situation and its causes, but the desire to contribute to update of the Keynesian model for to provide to the governments and institutions with an instrument of economic policy action that should never has been lost.

Key words: Keynes, model, General Theory

I - La intención de este trabajo es el de actualizar el modelo keynesiano desde su mismo origen, es decir, desde la *General Theory*, después de haber soportado el mundo occidental -y diría todo el planeta en mayor o menor medida- la recesión más importante desde la Gran Depresión del 29 del siglo pasado. La oportunidad y la necesidad -que siempre puede entenderse oportunista- se debe a que las recetas neoliberales, cuando las ha habido, para abordar la depresión que comenzó en el 2007 o 2008 -según criterios- han fracasado. El mercado, los mercados por sí solos, no han evitado las causas de la depresión ni han solucionado -sea por acción o simplemente por inacción- las consecuencias. La oportunidad de renovar el discurso keynesiano y *kaleckiano* es palmario aunque, como trabajo teórico que aquí se pretende, no es un análisis coyuntural de la situación y de sus causas, sino el deseo de poner un granito de arena en la necesaria actualización del modelo keynesiano para dotar a los gobiernos e instituciones de un instrumento de acción de política económica que nunca debió perderse u orillarse, pero subsanado de algunos de los defectos de los epígonos de Keynes y, si es menester, del propio Keynes. En la fecha de la publicación de la *General Theory* en 1936 decía Keynes de su libro -a modo de justificación- que "... las características

del caso especial supuesto por la teoría clásica no son los de la sociedad económica en que hoy vivimos, razón por la que sus enseñanzas engañan y son desastrosas si intentamos aplicarlas a los hechos reales". Lo mismo podríamos decir del tiempo presente, solo que sustituyendo "la teoría clásica" por el neoliberalismo y la austeridad.

Aquí iremos al trabajo original de Keynes porque, como veremos, incluso desde su origen, lo que nos legó el economista inglés fue adulterado hasta convertirlo, además, en un modelo más de equilibrio general. Con ello se restaba posibilidades a su verdadera potencialidad cual es el de convertirse en un poderoso instrumento de política económica, sobre todo en determinados momentos. La primera tergiversación de la que se hablaba en párrafos anteriores ya la denunció L. Pasinetti en un artículo traducido por *La teoría de la demanda efectiva*, recogido en su libro *Growth and Income Distribution. Essays in Economic Theory*, de 1974. Es verdad que habían pasado desde la publicación de la *General Theory* 38 años, pero el sabio refranero español dice que más vale tarde que nunca. También es verdad que es, precisamente, en esta década – los años 70–, cuando el keynesianismo empieza a ser sustituido por otros paradigmas. Pasinetti critica que uno de los epígonos interpretativos – podríamos decir que desleales– de Keynes como fue John Hicks, había dado una interpretación del modelo keynesiano¹ que rompía la línea causal que iba desde la determinación de los tipos de interés en el mercado monetario hasta el efecto causado por estos y lo que llamaba Keynes *la eficiencia marginal del capital*. Todo ello con el fin de determinar los niveles y proyectos de inversión en el mercado de bienes reales. La modelización llevada a cabo por Kahn y Hansen al poco – modelizando el multiplicador y la posterior concreción del modelo de equilibrio keynesiano IS-LM desarrollado por el propio Hicks– acabaron por adulterar lo que en origen no era un modelo de equilibrio general. La razón de que no fuera así la expresa Keynes en el capítulo 3 –que trata sobre *el principio de la demanda efectiva*– cuando dice que: "Si la propensión a consumir y el coeficiente de inversión nuevo se traducen en una insuficiencia de la demanda efectiva, el volumen real de ocupación se reducirá hasta quedar por debajo de la oferta de mano de obra potencialmente disponible al actual salario real², y el salario

¹ *Mr Keynes and the "Classics": a Suggested Interpretations*, 1937.

² Sería objeto de otra discusión que aquí no se aborda las supuestas unidades en las que Keynes mide sus agregados. Él lo hace en "unidades de salario" sin dar más explicaciones. Discutible en todo caso, pero Keynes intenta que su medición lo sea en términos no meramente monetarios. Aquí no se entra en este tema. Resulta interesante cómo Keynes en el capítulo 17 intenta medir objetivamente "la tasa de interés y la eficacia marginal del capital" sobre la base de "una mercancía compuesta que pudiera tomarse en sentido estricto como representativa...". Recuerda este texto a *la mercancía-patrón* de Sraffa, por lo que se supone que Keynes habría leído cuando redactaba este capítulo 17 los primeros borradores de *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Incluso hay quien sospecha que el capítulo 17 es obra

real de equilibrio será mayor que *la desutilidad marginal* de equilibrio de la ocupación". Más tarde añade que "la simple existencia de una demanda efectiva insuficiente puede –y a menudo hará– que el aumento de la ocupación se detenga *antes* de que hay sido alcanzado el nivel de ocupación plena". Parecería por este texto que Keynes pone el acento en el consumo a través de *la propensión a consumir*, pero eso sería una posible interpretación porque es el propio economista inglés quien señala en el mismo capítulo que "la inversión corriente provea un volumen de demanda justamente igual al excedente del precio de la oferta global de producción resultante de la ocupación plena...". A pesar de un lenguaje y algunos conceptos heredados del marginalismo y de un economista como Pigou³ –que desarrolló la llamada Economía del Bienestar– queda clara la idea de Keynes: *el principio de la demanda efectiva* –que sería aquella que, sumando el consumo más la inversión, llevaría al pleno empleo– nos dice que puede haber equilibrio en los mercados de bienes reales ¡sin que ello dé lugar al pleno empleo! Y esta consideración teórica y contrastable con modelos econométricos es determinante en el modelo keynesiano. Aunque se pueda atribuir ello a un problema de una *propensión a consumir* insuficiente –pero como ley sociológica no es operativa– es precisamente la inversión, tanto pública como privada, las que pueden mostrarse insuficientes cuando la demanda agregada y la oferta agregada estén en equilibrio. La economía clásica (representada por *Los principios* de Marshall) y el marginalismo de entonces se mostraron inertes ante esta crítica y ante ese modelo porque siempre habían confiado en la *ley de Say* –que Keynes menciona– y el poderío de la competencia en todos los mercados –también en el del trabajo– como para que la flexibilidad de precios y salarios permitieran una ocupación plena. Las causas y efectos posteriores acabaron dando la razón al modelo keynesiano porque, además, éste daba un poderoso instrumento a los gobiernos: ante una demanda insuficiente vía consumo o de la propia inversión privada, se podía aumentar la inversión pública y, en general, el gasto público, como para llevar los niveles de ambos hasta la demanda efectiva, es decir, hasta aquella donde la ocupación debería ser plena. Y ello se podría y se puede hacer con equilibrio presupuestario, es decir, igualando gasto público y monto total de impuestos.

La segunda tergiversación del modelo ha sido la de considerar que el keynesianismo era solo aplicable en situaciones de paro involuntario a pesar de que empresas y empresarios estén deseosos de contratar

directamente de Sraffa y no de Keynes. Pero todo esto se sale de las intenciones de este breve y concreto trabajo.

³ Tal era la influencia del economista Arthur Cecile Pigou (1877-1959), que Keynes le dedica en la *General Theory* un Apéndice entero, donde discute y critica su obra *Theory of Unemployment*.

empleo. Keynes dice, por el contrario, que “el salario real no puede ser menor que la *desutilidad marginal* del trabajo”⁴. Y como este se pueden aportar otros textos a lo largo del libro y en el mismo capítulo. Es hora de considerar que el principio de la demanda efectiva es universal y no solo aplicable a países desarrollados con paro involuntario. El equilibrio que menciona Keynes es una manifestación más de los equilibrios de la economía clásica del Ahorro igual a la Inversión o de la igualdad entre la demanda agregada y la oferta agregada. Que el economista inglés emplee un lenguaje heredado del marginalismo –*desutilidad marginal, eficiencia marginal del capital, propensión marginal al consumo*–, no menoscaba un ápice su actualidad, pero tampoco la adulteración de su modelo y su mensaje desde mediados de los años 70 del siglo pasado.

La tercera tergiversación del modelo keynesiano quizá pasó más desapercibida en los modelos y texto de introducción a la economía por las dificultades formales que entrañaba: ¡desde el origen, desde sus fundamentos, el modelo keynesiano no era lineal! En el capítulo 8 de la *General Theory* se dice que: “La ley psicológica fundamental en que podemos basarnos con entera confianza, tanto *a priori* partiendo de nuestro conocimiento de la naturaleza humana como de la experiencia, consiste en que los hombres están dispuestos, por regla general y en promedio, a aumentar su consumo a medida que su ingreso crece, aunque no tanto como el crecimiento de su ingreso”. Es un texto definitivo que anula todos los modelos lineales e interpretaciones que no tengan en cuenta este principio de *saciabilidad* en el consumo. Pero es que antes, en el capítulo 3, epígrafe II, dice Keynes que “el bosquejo de nuestra teoría puede expresarse como sigue: cuando aumenta la ocupación aumenta también el ingreso global real de la comunidad; la psicología de ésta es tal que cuando el ingreso real aumenta, el consumo crece, pero no tanto como el ingreso”. A pesar de ello la mayor parte de los modelos que se estudian en las facultades de economía y de ¡negocios! –al menos en los cursos elementales– son modelos lineales⁵. Y la mayor parte de los estudiantes se licencian o adquieren la graduación sin despegarse de la linealidad. Y esto es fundamental, porque de nada sirven los miles de artículos escritos por especialistas si estos no llegan a los cursos introductorios porque estos determinarán lo que hagan esos economistas si llegan a puestos de responsabilidad en instituciones y

⁴ Epígrafe II, capítulo 3 que trata del *principio de la demanda efectiva*, de la *General Theory*.

⁵ Textos no lineales del modelo keynesiano siempre han existido. Quiero mencionar el de David Romer *Advanced Macroeconomics*, 2001. Otro directamente en castellano es el de Norberto E. García *La crisis de la macroeconomía*, que analiza cómo las diversas coyunturas por las que ha ido recorriendo la economía real en el planeta –o al menos en el mundo desarrollado– han influido en las construcciones teóricas de la economía.

empresas privadas. Por ello, en el presente trabajo, vamos a desarrollar un modelo básico, pero no lineal, desde el inicio, desde los fundamentos, acorde con el texto de Keynes y cuyas consecuencias teóricas son significativas⁶.

Así y frente a las ecuaciones de Consumo (demanda) tradicionales vamos a desarrollar en un primer momento el modelo keynesiano en este trabajo mediante una ecuación de consumo tal como:

$$(1) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T)$$

donde **C** es la demanda de consumo, **A** es la parte del consumo no dependiente de la renta (autónomo), **a** es la *propensión a consumir*⁷, **Y** es la renta agregada (igual a la demanda agregada en los modelos habituales e igual a la producción agregada) y **T** es el conjunto de los impuestos. Esta sería una ecuación operativa, aunque podríamos extender la interpretación keynesiana leída bajo el principio de *saciabilidad* a una función de consumo más acorde con el mismo tal como:

$$(2) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T) + a^3(Y - T) - \dots$$

En general la ecuación podría ser del tipo:

$$(3) \quad C = A + \sum_{t=1}^{t=n} a_t(Y - T)(-1)^{t-1}$$

⁶ Una posible cuarta tergiversación es la que evitó el propio Keynes en el capítulo 14 de su obra cuando señala que "el análisis tradicional es defectuoso porque no ha podido aislar correctamente las variables independientes del sistema. Ahorro e Inversión son ahora determinadas, no determinantes". La consecuencia del modelo señalado por estas palabras es que la Inversión determina el Ahorro y no al revés, o que fuera un mero equilibrio entre oferta y demanda agregadas. En efecto, *Consumo* e *Inversión* son componentes de la demanda agregada y el Ahorro es una consecuencia del modelo como diferencia entre lo que se produce y lo que se consume según Keynes y su modelo. Ahí el economista inglés estuvo al quite.

⁷ Keynes lo llamó *propensión marginal al consumo*. Aparte de considerarlo una concesión al marginalismo, vemos que el término *marginal* no tiene sentido –o está de más– si estamos en una función lineal; en cambio lo tiene si, en este caso, la función de consumo fuera decrecientemente creciente.

donde la propensión a consumir α_t variaría según añadiéramos términos $\alpha_t(Y-T)$ al segundo miembro de la ecuación y, si en lugar de mantener el mismo parámetro α , lo fuéramos cambiando en cada período. Estas propensiones deberían ser cada vez menos importantes –con valores cada vez más cerca de cero– a medida que avanzáramos en los términos de la ecuación⁸. Sin embargo las dificultades de estimación de una ecuación como la (3) son notables por el gran número de incógnitas (todas las propensiones α_t), por lo que nos remitimos a la ecuación (2) como más operativa, pero suficientemente representativa del principio de *saciabilidad* comentado y que con tanto ahínco señala Keynes. Podría haber utilizado una función logarítmica –como hace, por cierto, David Romer en la obra citada– dado que dicha función es decrecientemente creciente⁹. Sin embargo esta función no tiene la versatilidad y posible acomodo a los datos empíricos como tiene las funciones anteriores, especialmente la (3), además de las dificultades matemáticas que supone explicitar la demanda agregada Y en una ecuación donde aparece esta incógnita en ambos lados de la desigualdad, como sería el caso de una función logarítmica.

Abordamos en este punto otro componente de la demanda agregada como son las Importaciones (I_m) y el componente de los impuestos T que se detraen de la demanda agregada Y para hacer depender el Consumo de la *renta disponible* $Y-T$. Las importaciones tradicionalmente se han hecho depender de forma lineal de la demanda agregada mediante $I_m = mY$. Keynes aborda el tema someramente en el capítulo 10, epígrafe III, pero no acaba de dar una relación formal del tipo anterior. Ocurre algo parecido cuando aborda el Consumo como dependiente de la renta disponible, pero para ambos casos sí señala que “se reduce la eficacia marginal para el inversionista privado” cuando en el primer punto de este tercer epígrafe nos habla del “método de financiar la política...” o, para el caso de las importaciones, nos dice de “reducir la cifra del multiplicador”. Pero que Keynes no hiciera explícitos el papel de los impuestos T o la dependencia lineal o no de las importaciones I_m no significa que no podamos hacerlo nosotros. La guía de estas interpretaciones complementarias ha de ser el principio de *saciabilidad* que está en los fundamentos de la *General Theory*. Es verdad que incluso Keynes remite a Kahn para “los factores que se deben tener en cuenta en no olvidar en una sociedad moderna...”, y luego aborda “la financiación de la política” (económica) y “las relaciones de comercio exterior” antes aludidas, como queriendo responsabilizar a Kahn de los otros componentes de la

⁸ Es claro que todos los parámetros α_t no podrían estimarse porque tendríamos casi tantos de ellos como datos de las variables observables. Por ello podría considerarse que, a partir de un número de parámetros distintos, el resto de las expresiones de la renta disponible $Y-T$ fuera multiplicadas por el mismo parámetro. O bien, como se hace en la ecuación (2), mantener el mismo parámetro α variando su exponente.

⁹ Su primera derivada es positiva y la segunda negativa.

demanda agregada que no sean el Consumo y la Inversión. En cualquier caso creo que los textos anteriores y otros de la propia *General Theory* pueden justificar que, por más elemental e introductorio que sea el modelo keynesiano con el que trabajemos, el componente de la demanda de Consumo depende de la renta disponible y que las importaciones dependen de la demanda agregada. Otra cosa es la discusión de si, en este caso último de las importaciones, la dependencia es lineal o no para un modelo elemental. En este trabajo seremos eclécticos y presentamos modelos lineales y no lineales de las importaciones, pero si somos coherentes con el principio de *saciabilidad* keynesiano deberíamos emplear modelos donde las importaciones son también decrecientes de la demanda agregada. Y coherentemente con la función de Consumo, también en el caso de las importaciones deberíamos incorporar un componente autónomo de demanda. Por tanto, una función de demanda de las importaciones debería ser tal como:

$$(4) \quad I_m = B + mY - m^2Y$$

donde **B** es el componente autónomo que mencionábamos y **m** la *propensión a importar*. Se puede generalizar esta función tal como hemos hecho la función de Consumo en (3) pero, al menos de momento, no lo hacemos explícitamente. La función lineal alternativa a esta sería la tradicional:

$$(5) \quad I_m = mY$$

El juez de incluir en un modelo elemental una de las dos funciones anteriores debería ser la contrastación empírica, porque no tenemos razones o argumentos *keynesianos* textuales para decidir por una o por otra. Al menos yo no los encuentro.

En el tema de formalizar una posible dependencia de los impuestos **T** aún tenemos más dificultades porque en el texto de Keynes la ausencia de argumentos es más notable. Es verdad que en un modelo de demanda agregada tal como:

$$(6) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

siempre podemos partir de que la economía está en un equilibrio presupuestario tal que el gasto público **G** sea igual al monto total de impuestos **T**, pero esa exigencia no está en Keynes, ni en el espíritu de los modelos keynesianos, ni en la política de inspiración keynesiana, donde la lucha contra la depresión o las recesiones es el gasto público el que debe jugar un papel trascendente aun cuando se incurra temporalmente en un déficit **D**. Por ello la relación entre gasto público **G** e impuestos debería venir dado en un modelo elemental keynesiano por la ecuación¹⁰:

$$(7) \quad \mathbf{G} = \mathbf{T} + \mathbf{D}$$

En cuanto a los factores determinantes de los impuestos no encuentro en Keynes –al menos en la *General Theory*– un texto relevante. Por ello habría que inclinarse por dejarlo sin explicitar si nos atuviéramos a un análisis meramente textual. Sin embargo podemos avanzar también que en los impuestos hay dos componentes al menos: uno **H**, que es autónomo, y otro dado por un coeficiente **b** que multiplica a la renta agregada. Por ello sería admisible también una ecuación de determinación de los impuestos tal como:

$$(8) \quad \mathbf{T} = \mathbf{H} + \mathbf{bY}$$

Con las exportaciones **E_x** asumimos que dependen de la renta universal (renta del resto del mundo), por lo que no es posible una dependencia con una variable representativa que pudiera, además, influir en la demanda agregada del modelo. En cuanto a las inversiones **I** no entramos en este artículo sobre su posible dependencia sobre los tipos de interés, la *eficacia marginal del capital*, la demanda agregada, los *animal spirits* keynesianos o de las variaciones de la producción agregada. Simplemente la tomamos como un componente autónomo. La razón de ello es que en el presente trabajo no abordamos los temas monetarios de la *General Theory*. Eso no significa que todo lo anterior no influya en las inversiones en el modelo, sino que, al no hacerlas explícitas, cualquier supuesto movimiento de las variables anteriores supondría un *desplazamiento* de la función de inversión **I** sin más especificación formal.

¹⁰ En Keynes la posibilidad del déficit es siempre ocasional. Por ello, salvo en el modelo en el que los gastos superan los ingresos, es decir, que **G=T+D**, hemos desarrollado los modelos con equilibrio presupuestario.

II - Con las piezas anteriores podemos abordar ya un modelo elemental keynesiano, pero con una función de Consumo inédita como es la (1). De acuerdo con esta primera aproximación las ecuaciones del modelo serían:

$$(9) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(10) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T)$$

$$(11) \quad G = T$$

$$(12) \quad I_m = mY$$

El resultado de todo lo anterior es una función de demanda agregada tal como:

$$(13) \quad Y = \frac{A + I + E_x + (1 - a + a^2)T}{1 - a + a^2 + m}$$

donde tanto la propensión al consumo a como, lo que podríamos llamar, propensión de las importaciones m , están comprendidas entre cero y uno. Lo notable de este modelo elemental viene ahora, cuando queremos hallar la dependencia marginal de la demanda agregada Y de la propensión marginal al consumo a . Si calculamos la primera derivada¹¹ en (13) queda:

$$(14) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(2a - 1)[mT - A + I + E_x]}{(1 - a + a^2 + m)^2}$$

En este modelo y de acuerdo con (14), para que la producción agregada Y sea positiva respecto a la propensión al consumo a –es decir, para que el multiplicador sea positivo–, ha de cumplirse dos condiciones. La primera es la de que $2a - 1$ sea positivo, lo cual nos da que la propensión al consumo a ha de ser mayor **0,5**, es decir, que se cumpla que:

¹¹ En el numerador de la derivada se produce una reducción notable que no es fruto de la casualidad.

$$(15) \quad a \geq 50\%$$

La segunda condición es que $mT - A + I + E_x$ sea mayor que cero, lo cual nos da la notable condición de que:

$$(16) \quad T > \frac{A + I + E_x}{m}$$

El propio Keynes en su texto capital y remitiéndose a Kahn, nos dice que la propensión al consumo a está en todos los estudios de la época en torno al 80%. Y hoy mismo esa propensión está muy por encima de ese 50%, por lo que la segunda condición (16) ha de cumplirse necesariamente. Pero ello supone ir contra la tendencia neoliberal de considerar que, cuantos menos impuestos, mejor. Los supuestos ¡multiplicadores positivos de la austeridad! han sido rebatidos en la presente recesión. La ecuación (16) nos dice que, dado el componente autónomo del consumo A , el nivel de inversiones I , el total de exportaciones E_x y la propensión a importar m , ¡los impuestos deben superar el segundo miembro de la inecuación para que el multiplicador de la renta (medido y en equilibrio con la demanda agregada) sea positivo! Obsérvese, además, que en este primer modelo del presente trabajo hemos considerado que el gasto público G está en equilibrio con el total de los impuestos T , de acuerdo con la ecuación (11).

A estas alturas podríamos preguntarnos qué hubiera pasado si no hubiéramos partido de este factor de *saciabilidad* representado por la ecuación (10) de la demanda de consumo. Entonces ésta sería lineal como habitualmente es usada. Un ejemplo sería que $C = A + a(Y - T)$, la cual daría como producción agregada si se mantienen el resto de las ecuaciones (9), (11) y (12):

$$(16.2) \quad Y = \frac{A + I + E_x + (1 - a)T}{1 - a + m}$$

Y cuya derivada respecto a la propensión al consumo a es:

$$(16.3) \quad \frac{dY}{da} = \frac{A + I + E_x - mT}{(1 - a + m)^2}$$

Y donde vemos que, para que la propensión al consumo sea positiva, se ha de cumplir que el monto de los impuestos T sea:

$$(16.4) \quad T < \frac{A + I + Ex}{m}$$

Entonces en (16.4) el signo de la desigualdad de los impuestos T para que el multiplicador en (16.3) sea positivo es justamente el contrario del presentado en (16), en el modelo con *saciabilidad* en el consumo! Además, en este modelo lineal sin *saciabilidad*, no hay exigencia de mínimo de la propensión al consumo a como sí la hay con *saciabilidad* mediante la inecuación (16.4). Al introducir los impuestos como financiadores del gasto público –lo cual no puede eludirse– se hace palmario el error de los modelos lineales de la función de consumo porque éste no puede aumentar ilimitadamente y de forma lineal respecto a la renta. Sería tanto como obtener gratis un multiplicador de la renta a partir de la propensión al consumo. Desde luego, por los textos recogidos en la primera parte de este trabajo, una función lineal en el consumo va contra el modelo keynesiano desde sus principios sin ninguna duda. Lo veremos más adelante incluso con un gráfico.

III – Intentaremos en este epígrafe reformular el modelo mediante dos modificaciones razonables. En primer lugar y por el mismo principio de *saciabilidad* en el consumo que ha guiado el modelo del epígrafe anterior, vamos a cambiar la demanda de importaciones mediante una ecuación tal como la (4) $I_m = B + mY - m^2Y$. En segundo lugar vamos a contemplar la posibilidad de trabajar con presupuestos deficitarios, algo muy común en el mundo actual, aunque en tiempos de Keynes no se contemplaba en los modelos. Por tanto, incorporaremos la ecuación (7) $G = T + D$ al modelo, siendo D el *déficit presupuestario*. En todo caso el modelo será igualmente válido con equilibrio presupuestario haciendo en la ecuación anterior y en las resultantes $D = 0$. Las ecuaciones, por tanto, que formarán parte de este segundo modelo serían:

$$(17) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(18) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T)$$

$$(19) \quad G = T + D$$

$$(20) \quad I_m = B + mY - m^2Y$$

Tras hacer las oportunas sustituciones y despejar la producción agregada Y sale:

$$(21) \quad Y = \frac{A - B + I + E_x + D + (1 - a + a^2)T}{1 - a + a^2 + m - m^2}$$

Buena parte de lo dicho para el análisis de la ecuación (13) del epígrafe anterior sigue siendo válido, pero con dos matizaciones. Al incorporar un sumando (pero con signo negativo) como es m^2 en el denominador, estamos haciendo más grande el multiplicador, que ahora es el inverso de $1 - a + a^2 + m - m^2$. Lo cual tiene sentido económico puesto que hemos paliado el efecto negativo en el multiplicador de las importaciones al incorporar el principio de *saciabilidad*, que en el modelo tiene su trasunto en una disminución del denominador de (21) por el coeficiente m^2 ($m = \text{propensión a importar}$). El efecto contrario se produce en el numerador por el componente autónomo de las importaciones B , que entra con signo negativo. Y tan interesante como lo anterior es que el efecto del déficit D , incorporado en el modelo, es positivo al calcular la derivada de la demanda agregada Y respecto al valor del déficit D . Es decir, queda:

$$(22) \quad \frac{dY}{dD} = \frac{1}{1 - a + a^2 + m - m^2}$$

Si ahora queremos calcular el efecto de la propensión marginal al consumo a sobre la producción agregada (=renta agregada=demanda agregada), es decir, el multiplicador de acuerdo con el conjunto de ecuaciones que van de la (17) a la (20), queda:

$$(23) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(2a - 1)[(m - m^2)T - (A - B + I + E_x + D)]}{(1 - a + a^2 + m - m^2)^2}$$

Al igual que en el caso anterior (ecuación (14)), para que el multiplicador respecto a la propensión al consumo –expresado por la derivada de la demanda agregada Y respecto a esa propensión a – sea positivo se ha de cumplir dos condiciones. La primera es la de que esa propensión a supere el coeficiente del 50%. La segunda condición se deriva de (23) también y se expresa formalmente mediante:

$$(24) \quad T > \frac{A - B + I + Ex + D}{m - m^2}$$

Es decir, el monto de los impuestos T ha de superar el lado derecho de la inecuación (24). Comprobamos en lo anterior que el componente autónomo de las importaciones B obliga menos a la financiación del gasto, pero lo contrario en cuanto el déficit, es decir, a mayor déficit D , mayores impuestos pero con un efecto multiplicador sobre la producción agregada dado por la inversa de $m - m^2$. A pesar de ello hemos visto en (21) el efecto positivo en la demanda agregada Y como consecuencia de un déficit. Si reunimos ambos resultados, es decir, las consecuencias derivadas de la ecuación (21) y de la inecuación (24), se explica la importancia y el progresivo aumento de lo público en los países desarrollados: por un lado sirve para aumentar el nivel de producción a través del efecto sobre la demanda agregada de los déficits, pero también señala (24) la necesidad de financiarlos –o de acabar con ellos– mediante aumentos del gasto público porque el efecto del multiplicador compensará los déficits previos¹². En cambio las importaciones, siendo imprescindibles por otros motivos como son la competencia entre bienes importados y domésticos para contener los precios y también su contribución a la productividad general de la economía, siempre tienen a nivel agregado un efecto negativo sobre la renta agregada¹³, cosa que puede comprobarse tanto en la ecuación (21) como en la (24). En economía, como en la vida misma, nada es gratis y ello es así en el modelo keynesiano.

IV – A los efectos de ajustes econométricos podemos generalizar el modelo anterior mediante el conjunto de ecuaciones:

$$(25) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(26) \quad C = A + \sum_{t=1}^{t=n} a^t (Y - T)(-1)^{t-1}$$

$$(27) \quad G = T + D$$

$$(28) \quad I_m = B + \sum_{t=1}^{t=n} m^t Y (-1)^{t-1}$$

¹² Aunque formalmente no se introduce la variable tiempo, puede darse por hecho su existencia en las ecuaciones (13), 16.2) y (21). Éstas serían soluciones de equilibrio.

¹³ Hemos supuesto desde el principio que *demanda*, *renta* y *producción* agregadas son iguales, lo cual puede interpretarse de que partimos de un equilibrio entre estas macromagnitudes. No se entra ni se discute en el presente trabajo cualquier otra circunstancia de estos equilibrios y de estas definiciones agregadas.

Y el resultado de este conjunto es:

$$(29) \quad Y = \frac{A - B + I + E_x + D + T \sum_{t=0}^{t=n-1} a^t (-1)^{t+2}}{\sum_{t=0}^{t=n-1} a^t (-1)^{t+2} + \sum_{t=1}^{t=n} m^t (-1)^{t+1}}$$

Incluso puede aún generalizarse más suponiendo que las funciones de consumo y de importaciones no dependan de la renta disponible $Y-T$ ni de la renta agregada Y por un solo parámetro, sino de n parámetros, es decir, con n propensiones a consumir a_t o m_t a importar. Pero quizás esto sería alejarnos demasiado de un posible básico y de *espíritu keynesiano* modelo obtenido a partir de una lectura crítica de la *General Theory*.

V – En este quinto epígrafe vamos a generalizar el principio keynesiano de *saciabilidad* –que Keynes solo lo aplica al Consumo– a los impuestos. Para ello vamos a separar la parte de los impuestos que dependen de la renta agregada Y de aquellos que son independientes de ella. Y además vamos a aplicar también un principio de *saciabilidad* a los propios impuestos, evitando que la parte de la dependencia de los impuestos sobre los ingresos sea meramente lineal. La ecuación sería $T=H+bY-b^2Y$, donde T es el monto total de impuestos recaudados (incluidas las cotizaciones a la S. Social en el caso español), H serían los impuestos recaudados que no varían con variaciones de la renta agregada y b un coeficiente estimado econométricamente que nos da la dependencia de la parte de los impuestos que, supuestamente, dependen de la renta agregada Y . El conjunto de ecuaciones que definirían ahora el modelo keynesiano sería:

$$(30) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(31) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T)$$

$$(32) \quad G = T + D$$

$$(33) \quad I_m = B + mY - m^2Y$$

$$(34) \quad T = H + bY - b^2Y$$

Del conjunto de este sistema de cinco ecuaciones se obtendría:

$$(36) \quad Y = \frac{A - B + I + E_x + D + (1 - a + a^2)H}{(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) + m - m^2}$$

Calcularíamos de nuevo el multiplicador dado por la primera derivada del producto Y respecto a la propensión marginal al consumo a y obtendríamos:

$$(37) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(2a-1)[(m-m^2)H - (1-b+b^2)(A-B+I+E_x+D)]}{[(1-a+a^2)(1-b+b^2) + m - m^2]^2}$$

Y donde vuelven a darse dos condiciones análogas a las del epígrafe III. La primera es la de que la propensión marginal al consumo¹⁴ a sea mayor del 50% dado que $2a-1$ debe ser mayor que cero. La segunda que, para los impuestos H no dependientes de la renta agregada Y , se dé la inecuación:

$$(38) \quad H > \frac{(1-b+b^2)(A-B+I+E_x+D)}{m-m^2}$$

Esta segunda condición entraña su problemática porque indica que, a medida que la parte de los impuestos recaudados dependientes de la renta (que vienen marcados por el parámetro b) sean más altos, es más difícil de cumplir la inecuación (38). De alguna forma la relación entre impuestos no dependientes dados por H y los dependientes dados en el modelo por la expresión $bY-b^2Y$ deben ser una situación de compromiso entre unos y otros. Por otra parte también podemos comprobar en la ecuación resultante (36) de que, a medida que los impuestos dependientes de la renta agregada aumentan porque aumenta el coeficiente b , el multiplicador de estos impuestos disminuye, efecto que cabía esperar.

Ahora vamos a calcular el valor de la producción agregada Y cuando la propensión al consumo a valga cero y, también, el límite al que tiende Y cuando la propensión tiende a infinito, a pesar de la condición de que la propensión al consumo es siempre menor que uno. La expresión matemática de estas dos condiciones da:

¹⁴ Para decirlo correctamente, la condición de que el multiplicador sea expansivo abarca solo desde que la propensión al consumo a sea mayor de **0,5** hasta **1**, que es el máximo en el que está definida, por hipótesis, esta propensión. Todo la problemática matemática del modelo la veremos en otros epígrafes.

$$(39) \quad Y(a=0) = \frac{A - B + I + E_x + D + H}{1 - b + b^2 + m - m^2}$$

En cuanto a límite sale:

$$(40) \quad \limite Y(a \rightarrow \infty) \Rightarrow \frac{H}{1 - b + b^2}$$

Por lo que si se cumple que:

$$(41) \quad \frac{H}{1 - b + b^2} > \frac{A - B + I + E_x + D + H}{1 - b + b^2 + m - m^2}$$

Entonces el multiplicador (dY/da) es decrecientemente creciente. Para este fin ha de cumplirse (41). Y esta condición, si se eliminan términos comunes, no da que:

$$(42) \quad H > \frac{(1 - b + b^2)(A - B + I + E_x + D)}{m - m^2}$$

que es (38) y una condición análoga a la de la inecuación (16) del modelo del epígrafe II, que suponía y supone la segunda condición para que el multiplicador fuera positivo respecto a la propensión al consumo. En otros epígrafes veremos una representación gráfica de un modelo análogo a este.

VI - Las condiciones del epígrafe anterior pueden tener una generalización del tipo:

$$(43) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(44) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T) + a^3(Y - T) - a^4(Y - T) + \dots$$

$$(45) \quad G = T + D$$

$$(46) \quad I_m = B + mY - m^2Y + m^3Y - m^4Y + \dots$$

$$(47) \quad T = H + bY - b^2Y + b^3Y - b^4Y + \dots$$

El conjunto del sistema de ecuaciones anterior daría un multiplicador de la renta tal como:

$$(48) \quad Y = \frac{A - B + I + E_x + D + (1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \dots)H}{(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \dots)(1 - b + b^2 - b^3 + b^4 - \dots) + m - m^2 + m^3 - m^4 + \dots}$$

Como quiera que tanto las propensiones a consumir a como las de importar m son menores que 1 , los sucesivos valores de ambos elevados a potencias cada vez superiores son cada vez menores. Por ejemplo, para una propensión a consumir del 80% –como recoge el mismo Keynes de Kahn– daría para a^4 un valor de 0,4096, que no es nada despreciable; para una propensión a importar del 40% daría, análogamente, un valor de 0,0256, que este sí es despreciable. Lo anterior demuestra el error de los modelos lineales del multiplicador: por un lado eluden el principio de *saciabilidad* pero, por otro, este principio no implica necesariamente que el efecto de un valor alto de las propensiones a consumir –o a importar si lo fueran– no tenga un fuerte impacto multiplicador sobre la producción agregada. La generalización de (48) sería:

$$(49) \quad Y = \frac{A - B + I + E_x + D + H \sum_{t=0}^{t=n-1} a^t (-1)^{t+2}}{\left[\sum_{t=0}^{t=n-1} a^t (-1)^{t+2} \right] \left[\sum_{t=0}^{t=n-1} b^t (-1)^{t+2} \right] + \sum_{t=1}^{t=n} m^t (-1)^{t+1}}$$

Apuntar que también son contrastables previamente las ecuaciones que dan lugar a (48) y, en su caso, a (49), por lo que las dos anteriores son doblemente contrastables. Una mayor generalización ya la hemos visto de forma análoga, pero en este caso sería:

$$(50) \quad Y = \frac{A - B + I + E_x + D + H \sum_{t=0}^{t=n-1} a_t (-1)^{t+2}}{\left[\sum_{t=0}^{t=n-1} a_t (-1)^{t+2} \right] \left[\sum_{t=0}^{t=n-1} b_t (-1)^{t+2} \right] + \sum_{t=1}^{t=n} m_t (-1)^{t+1}}$$

En la anterior los valores de a_0 y b_0 serían 1 . En el caso (50) tenemos $3n$ incógnitas, por lo que no es contrastable en principio, pero podemos dar valor cero a las sucesivas a_t , b_t y m_t a partir de un valor determinado

de f_t , con el fin disminuir el número de incógnitas a estimar y hace posible la contrastación empírica¹⁵.

Podemos ahora resumir y valorar las virtudes de las ecuaciones (49) y (50). Veamos: surgen de ecuaciones a su vez –tal como hemos visto– que parten del principio de *saciabilidad* tal como lo define Keynes y que debería haber sido en sus epígonos y en modelos posteriores una condición *sine qua non*; su versatilidad es notable puesto que podemos –o no– aumentar indefinidamente los valores de a^t , b^t y m^t , o bien, los de a_t , b_t y m_t ; todo ello contrastable; las macromagnitudes que actúan como datos, como son Y , C , I , T (o H), E_x , I_m , D , A , B , lo son también en las estadísticas de los países y organismos internacionales (caso, vg, de eurostat); informa a los gobiernos sobre el qué hacer en el caso de situaciones de depresión o momentos bajo del ciclo de la economía; informa de cuáles son, teóricamente al menos, la dirección de los efectos de unas variables (o de otras empíricas que puedan actuar como variables) sobre la producción agregada. Y a todo lo anterior se puede enganchar la parte monetaria keynesiana –incluso alguna no estrictamente keynesiana– a través de los tipos de interés, la *eficiencia marginal del capital* keynesiano y el *acelerador*. Para rematar la faena, no habría dificultad conceptual –pero sí formal– para tomar los datos desagregados por sectores de las macromagnitudes mediante la disección *input-output* de la economía. Para esto último tendríamos que considerar que habría tantos multiplicadores como sectores de la economía, tanto en el consumo como en la importación. Esto lo abordamos en el siguiente epígrafe de este trabajo.

VII – Hasta ahora –y siguiendo los modelos keynesianos– hemos trabajado con valores agregados de producción, consumo, inversión, gasto público, exportaciones e importaciones. Ahora trabajaremos con valores desagregados, donde Y , C , E_x y I_m representarían vectores columnas de producción (demanda agregada), consumo, exportaciones e importaciones respectivamente, y donde cada elemento i de estos vectores representaría el sector donde se destinan los bienes y servicios. En el caso de transacciones intersectoriales del análisis **I-O** de Leontief (equivalente a la inversión I keynesiana) tendríamos una *matriz* $n \times n$, donde cada elemento de la matriz z_{ij} representaría la cantidad del bien procedente del sector i que sirve

¹⁵ Todo tiene sus ventajas e inconvenientes. El modelo (50) tiene la ventaja de su facilidad de contrastación empírica y el inconveniente de una limitada capacidad explicativa, puesto que todos los sumatorios de las propensiones al consumo y factores de los impuestos pueden reducirse a un solo elemento, respectivamente. El modelo (49) es más explicativo, pero también más arriesgado porque apuesta por una forma concreta de *saciabilidad* de acuerdo con la/s función/es de consumo expuestas. Ahora bien, es la contrastación empírica la que debe elegir las concreciones formales a utilizar.

para producir una unidad de un bien destinado al sector **j**. En análisis **I-O** de Leontief se hace depender el vector columna **i** de la suma de productos tal como:

$$(51) \quad I_i = z_{i1}y_1 + z_{i2}y_2 + \dots + z_{in}y_n \quad \forall i = 1 \text{ a } n$$

Ahora tendríamos desagregados por sectores de la economía según su destino (subsectores de sectores agrícolas, industriales, construcción, de servicios) representados por la ecuación matricial:

$$(52) \quad Y = C + \sum_{j=1}^n z_{ij}y_j + G + E_x - I_m$$

$\begin{matrix} n \times 1 & n \times 1 & & n \times 1 & n \times 1 & n \times 1 & n \times 1 \end{matrix}$

En la función de consumo **C** tendríamos un vector columna, donde cada sector **c_i** tendría una propensión al consumo **a_{ii}**, de tal forma que el total de los consumos por sectores **i** vendría representado por:

$$(53) \quad c_i = a_i + a_{ii}y_i - a_{ii}^2y_i \quad \forall i = 1 \text{ a } n$$

En el caso de la importación en este modelo lo dejaríamos representado por:

$$(54) \quad i_i = m_{ii}y_i \quad \forall i = 1 \text{ a } n$$

donde **i_i** recoge el total de las importaciones¹⁶ destinadas al sector **i**. Y, para no complicar el modelo más allá de lo necesario, representaremos el equilibrio presupuestario por sectores, de tal forma que el gasto destinado al sector **i** le asignaremos administrativamente la cantidad total del impuesto destinado al mismo sector, de tal forma que tendremos:

$$(55) \quad t_i = g_i \quad \forall i = 1 \text{ a } n$$

¹⁶ Como puede comprobarse por lo dicho hasta ahora en este epígrafe y a pesar de la desagregación, trabajamos con valores monetarios. Los modelos *input-output* pueden ser monetarios o no monetarios hasta donde se pueda (si se agrega se suman valores monetarios). No se entra en este trabajo en esta problemática.

La representación matricial final vendría dada por:

(56)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La representación algebraica de (56) sería:

$$(57) \quad y_i = a_i + a_{ii}y_i - a_{ii}^2y_i + \sum_{j=1}^n z_{ij}y_j + t_i + e_i - m_{ii}y_i \quad \forall i = 1 \text{ a } n$$

que, en términos matriciales, queda:

$$(58) \quad \begin{matrix} Y & = & A & + & a & Y & - & a^2 & Y & + & z & Y & + & T & + & E_x & - & m & Y \\ n \times 1 & & n \times 1 & & n \times n & n \times 1 & & n \times n & n \times 1 & & n \times n & n \times 1 & & n \times 1 & & n \times 1 & & n \times n & n \times 1 \end{matrix}$$

Y que, trasladando términos y despejando el vector **Y** de producción agregada (=demanda agregada=renta agregada), quedaría:

$$(59) \quad Y = \begin{bmatrix} I - a + a^2 + m - z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A + E_x + T \end{bmatrix}$$

donde **I** es la matriz diagonal de unos.

Dada la pretendida brevedad de trabajo no se desarrolla más este último modelo, pero el lector de esto puede entretenerse en desarrollar modelos donde las funciones de consumo, de importación y de impuestos sean más complejas –a partir, sobre todo, de aplicar el principio de saciabilidad-. *Saciabilidad*, principio de la demanda efectiva y modelo de Leontief integrados, permiten desarrollos de un multiplicador inédito y creo que fructífero, al menos en el plano teórico.

VIII - Variantes matemáticas del principio de saciabilidad keynesiano.

α-1 - Para no recargar con excesos matemáticos el cuerpo central de este trabajo relegamos a este apéndice algunas consideraciones sobre el modelo keynesiano. Ya hemos visto al final del epígrafe II la importancia que tiene en el modelo original de Keynes que la demanda de bienes de consumo no sea lineal respecto a la renta disponible. Por ejemplo, un modelo lineal –contrario a lo deseado por Keynes en la *General Theory* como hemos demostrado– podría venir dado por el conjunto de ecuaciones tal como:

$$(60) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(61) \quad C = A + a(Y - T)$$

$$(62) \quad G = T$$

$$(63) \quad I_m = mY$$

Incluso en este modelo tan simplificado, en el que hacemos depender el consumo linealmente de la renta disponible (61) y las importaciones también linealmente de la renta agregada (63), es un modelo completo porque mantiene el equilibrio presupuestario mediante (62). Si ahora reemplazamos las tres últimas ecuaciones en la (60) obtenemos que el producto agregado **Y** vale:

$$(64) \quad Y = \frac{A + I + E_x + (1 - a)T}{1 - a + m}$$

Si ahora queremos ver el impacto de la propensión al consumo **α** en este modelo lineal respecto a la renta agregada **Y** solo tenemos que calcular, como siempre, la primera derivada y sale:

$$(65) \quad \frac{dY}{da} = \frac{A + I + E_x - mT}{(1 - a + m)^2}$$

Lo cual nos dice que, para que la propensión al consumo **α** tenga el efecto deseado sobre la producción agregada **Y** –efecto expansivo–, los impuestos **T** han de permanecer por debajo de:

$$(66) \quad T < \frac{A + I + E_x}{m}$$

Que no es una condición en exceso exigente, salvo que estemos en un país con bajo consumo autónomo **A**, escasez de inversiones privadas **I** y con un déficit exterior que haga que la propensión a importar **m** sea tan alta que obligue, de acuerdo con (66), a que los impuestos permanezcan por debajo de un cierto límite dado, precisamente, por esta última inecuación. Resultará instructivo la representación gráfica de la función (64) entre las variables de la producción agregada **Y** y la propensión al consumo **a**. Para ello vamos a calcular el punto de corte de la función en el eje de la propensión al consumo y sale:

$$(67) \quad Y(a=0) = \frac{A + I + E_x + T}{1 + m}$$

También calcularemos el punto de corte de la función para **a=1**, puesto que es el límite máximo de la propensión al consumo por hipótesis económica.

$$(68) \quad Y(a=1) = \frac{A + I + E_x}{m}$$

Hemos supuesto en el modelo que el nivel de impuestos globales **T** es tal que hace que $Y(a=1) > Y(a=0)$, lo que supone hacer:

$$(69) \quad \frac{A + I + E_x}{m} > \frac{A + I + E_x + T}{1 + m}$$

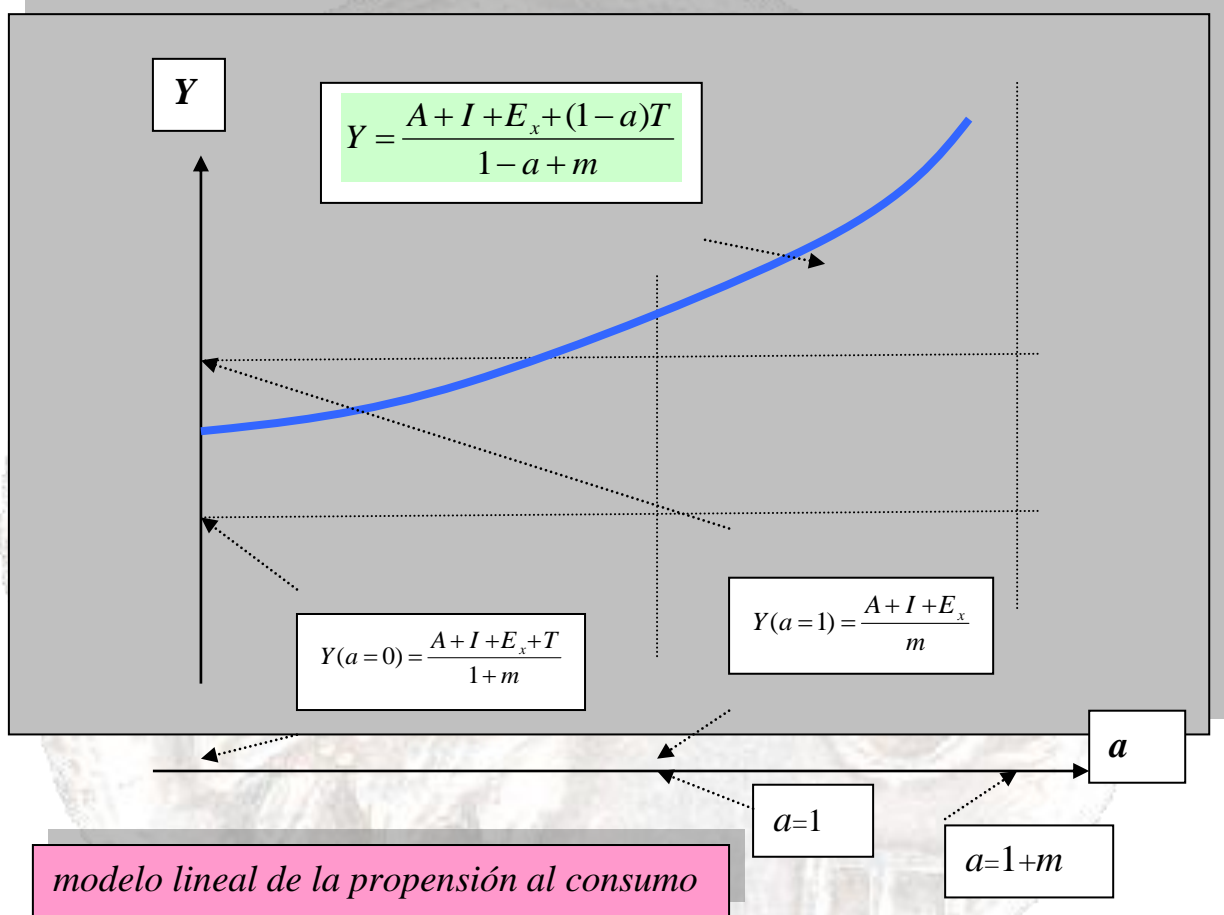
Y para que se cumpla (69) ha de ocurrir que:

$$(70) \quad T < \frac{A + I + E_x}{m}$$

que es una de las condiciones para que la función (64) sea creciente, es decir, ¡para que el multiplicador sea expansivo! Si halláramos la segunda derivada de la función (64) obtendríamos:

$$(71) \quad \frac{d^2Y}{da^2} = \frac{[A + I + E_x - mT]}{(1 - a + m)^3}$$

que ha de ser positiva para que se cumpla, como hasta ahora, la inecuación (66).



Como quiera que en el numerador de la primera derivada de la función (65) no aparece la propensión al consumo a , la función es crecientemente creciente –no tiene máximo ni mínimo para ningún valor de a – y crece hacia el infinito cuando la propensión tiende a $1+m$. Todo ello es absurdo precisamente porque, contrariamente al texto de Keynes, la función de consumo (61) es lineal respecto a la renta disponible $Y-T$, por lo que no hay límite al crecimiento según el modelo y lo único que hace la propensión a importar m es aminorar el crecimiento. Esto último es esperable puesto que, la necesidad de importar y mantener el equilibrio exterior, limita el crecimiento de la producción agregada Y al depender negativamente de las importaciones. Todo esto se ha producido al no contemplar el principio

de *saciabilidad* que Keynes señalaba y que hemos traído a colación en el primer epígrafe de este trabajo. Sin embargo, modelos análogos al expuesto arriba, son con los que se ha venido trabajando y, sobre todo, explicando a los alumnos de Economía en las facultades del planeta. Por ello hay que decir que este modelo y cualesquiera que contemplen linealidad entre la renta disponible y el consumo no son keynesianos¹⁷ – aunque así se presenten– desde el mismo núcleo duro de la *General Theory*.

a-2 - Para combatir esta interpretación mayoritaria del modelo keynesiano –la lineal, la de hacer depender linealmente el consumo de la renta agregada– es por lo que hemos propuesto en este trabajo un modelo tal que, ¡desde los principios, desde los fundamentos!, la función de consumo sea decrecientemente creciente. Esta debería ser la interpretación ortodoxa tal como hemos recogido en el mismo Keynes desde la *General Theory*. Para combatir este error que se ha perpetuado –incluso hoy día en los cursos introductorios y no pocos de los más avanzados– es por lo que hemos propuesto una función de consumo decrecientemente creciente de acuerdo con el principio de *saciabilidad*. La elección de esta función de consumo elegida debe ser pasada, desde luego, por la contrastación empírica, por lo que debiera ser lo más versátil posible. La elegida en este trabajo lo es porque recuerda los desarrollos de Taylor de las funciones y porque permite hacer variables las propensiones al consumo a lo largo del tiempo, tomando como variables distintas α_t las sucesivas propensiones, aunque ello añada dificultades de contrastación. No todo se puede tener al mismo tiempo. Sin embargo este desarrollo de las propensiones al consumo, manteniendo el mismo coeficiente, tiene algunas dificultades que vamos a ver. Vayamos, a modo de ejemplo, a un modelo keynesiano con *saciabilidad* tal como:

(72)

$$Y = C + I + G + E_x - I_m$$

¹⁷ Ni siquiera Amit Bhaduri, un *post-keynesiano* crítico con la deriva *antikeynesiana* que ya se avecinaba a finales de los años 70 del siglo pasado, pudo escapar de esta linealidad en su libro *Macroeconomics. The Dynamics of Commodity Production*, 1980, fijando una función de consumo tal como $C=c(Y+B-I_m)$, siendo **C** el consumo, **B** las transferencias e I_m los impuestos directos. Decía Bhaduri en el prefacio del libro que “El cambio en los términos del debate exige una reformulación profunda del esquema keynesiano. Hay que buscar su carácter radical buscando la línea de pensamiento que abarca a Marx, Keynes y Kalecki. Este es el objetivo del libro que se presenta” (versión española del FCE, 1990). Carácter crítico no le falta ni al prefacio ni al propio texto, apoyándose de continuo en Kalecki. Pero a pesar de todo nunca sale de la linealidad y el resultado es un buen libro de macro, crítico, pero que no recoge la potencialidad revolucionaria de la obra de Keynes al no formalizar el principio de *saciabilidad* tan presente en la *General Theory*.

$$(73) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T)$$

$$(74) \quad G = T$$

$$(75) \quad I_m = mY$$

La función resultante de la producción agregada de lo anterior es:

$$(76) \quad Y = \frac{A + I + E_x + (1 - a + a^2)T}{1 - a + a^2 + m}$$

Si ahora, como siempre hacemos, calculamos la primera derivada de la producción agregada¹⁸ respecto a la propensión al consumo a sale:

$$(77) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(2a - 1)[mT - (A + I + E_x)]}{(1 - a + a^2 + m)^2}$$

Ahora –a diferencia del modelo lineal anterior– sí tenemos un valor de la propensión al consumo que va a ser un máximo o un mínimo, y que es $a=0,5$. Además se presenta una curiosa simetría y es que el valor de función (76) es igual para $a=0$ que para $a=1$, que son precisamente los límites entre los que se mueve la propensión al consumo por hipótesis económica, aunque mucho más cerca de uno que de cero. Así quedaría:

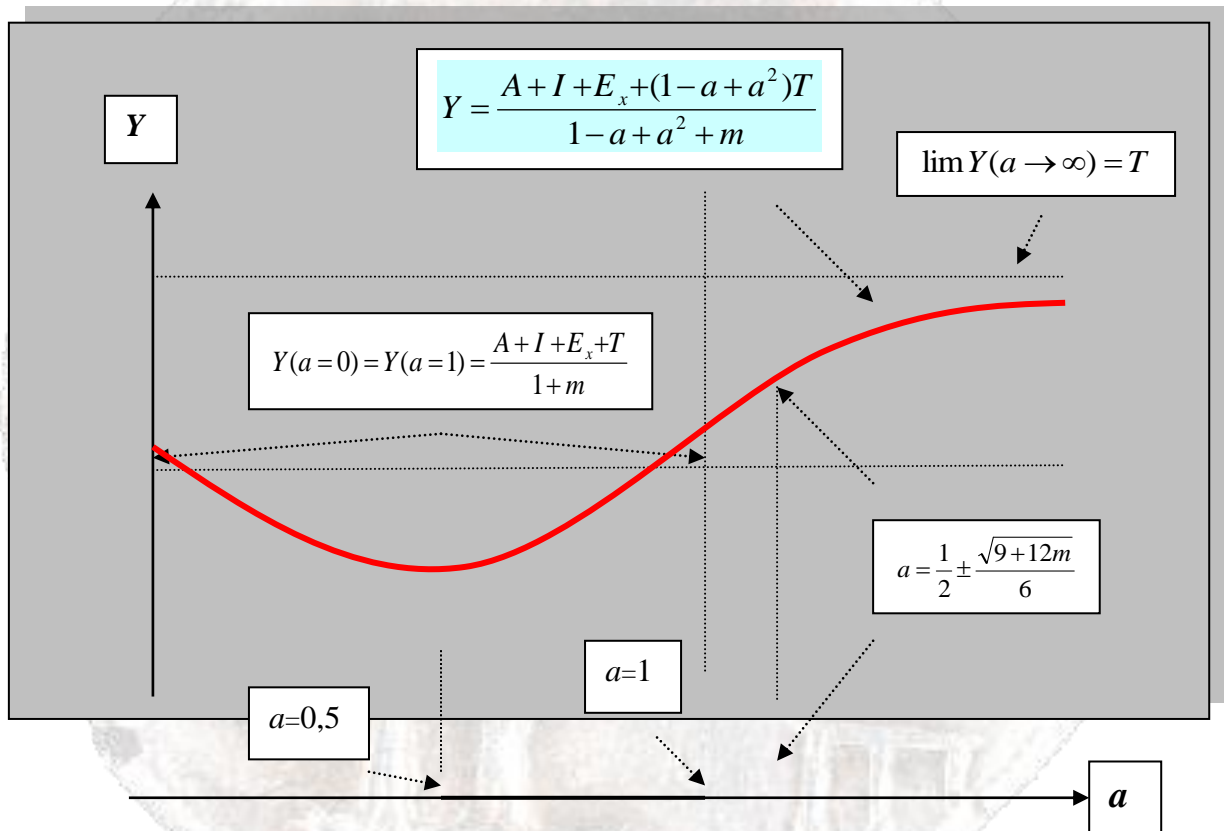
$$(78) \quad Y(a = 0) = Y(a = 1) = \frac{A + I + E_x + T}{1 + m}$$

Aunque no hallaremos la segunda derivada diremos que el que sea un máximo o un mínimo (77) va a depender de si es mayor o menor que cero la expresión entre corchetes $mT - (A + I + E_x)$. Pero el caso es que no podemos elegir porque para que la primera derivada sea creciente –multiplicador expansivo– ha de ocurrir dos cosas: la ya señalada de que $a > 0,5$ y que $mT - (A + I + E_x) > 0$, tal como podemos comprobar en (77). Y para ello se ha de cumplir que:

¹⁸ Seguimos manteniendo que Y representa simultáneamente *la renta agregada, la producción agregada y la demanda agregada*. Ello se debe a que partimos de la hipótesis, que no discutimos, de un equilibrio entre estas tres macromagnitudes.

(79)
$$T > \frac{A + I + E_x}{m}$$

puesto que siempre hemos supuesto que el gasto público **G** es igual a **T**. Si el total de los impuestos no superara la suma del consumo autónomo **A** más las inversiones privadas **I** más las exportaciones **E_x**, multiplicada esta suma por la inversa de la propensión a importar **m** ¡no estaríamos ante un multiplicador expansivo sino ante un desmultiplicador! Veamos la gráfica de un multiplicador expansivo.



modelo de multiplicador (keynesiano) con saciabilidad

La diferencia con el modelo lineal¹⁹ es notable. Que los impuestos tengan que superar un límite como el señalado por (79) para que el

¹⁹ El papel que juegan en el modelo definido en (76) la propensión a importar **m** (dependiente de la renta agregada **Y**) y los impuestos **T** para que el multiplicador sea expansivo es crucial. Si, por ejemplo, en (76) las importaciones **I_m** no las hubiéramos hecho dependientes de la renta agregada aunque bajo el supuesto de equilibrio comercial (exportaciones = importaciones), la derivada de la renta respecto a la propensión al consumo **a** hubiera sido negativa (hacer en (77) **m=0**) en el tramo de propensión **a** superior al 50%. Lo mismo hubiera ocurrido si estuviéramos en una

multiplicador, derivado de la propensión al consumo en este modelo con *saciabilidad*, sea positivo –expansivo– es algo que parece insoportable a las concepciones neoclásicas, pero el hecho es incontestable. Todo esto se ve en el gráfico que, como podrá comprobar el lector, se cumple que:

$$(80) \quad T > \frac{A + I + E_x + T}{1 + m}$$

que es la condición para que se cumpla (79), es decir, para que $T > (A+I+E_x)/m$, que es a su vez la condición, de acuerdo con el modelo, para que el multiplicador sea expansivo. Vemos el papel estratégico que juegan los impuestos en el modelo que, además, lo es de presupuesto equilibrado. Pero seguimos y vamos a completar la representación gráfica de este modelo que debiera ser el keynesiano ortodoxo, hallando la segunda derivada con el fin de hallar el punto de inflexión que hay a la derecha de $\alpha=1$, donde sabemos que, cuando α tiende a infinito, la función tiende al monto de los impuestos T . Hallamos la segunda derivada de (76):

$$(80.1) \quad \frac{d^2Y}{da^2} = \frac{2[(mT - (A + I + E_x))(1 - a + a^2 + m)[1 - a + a^2 + m - (2a - 1)^2]}{(1 - a + a^2 + m)^4}$$

Y dado que hemos supuesto que mT que es mayor que la suma de $(A+I+E_x)/m$ y que $1-\alpha+a^2-m$ solo tiene valores positivos para $0 < \alpha < 1$ y que $0 < m < 1$, la derivada segunda (80.1) será cero si la suma de $1-\alpha+a^2-m$ con $(2\alpha-1)^2$ vale cero. Y tras reducir términos y efectuar maniobras elementales sale:

$$(80.2) \quad \frac{d^2Y}{da^2} = \frac{2[(mT - (A + I + E_x))(3a - 3a^2 + m)}{(1 - a + a^2 + m)^3}$$

Ello da como punto de inflexión²⁰ (pasará de crecientemente creciente a decrecientemente creciente) en los puntos:

economía donde no hubiera impuestos T (se verá, análogamente, haciendo en (77) $T=0$). En ambos casos solo habría expansión mediante la propensión al consumo si esta fuera inferior al 50%, lo cual es un supuesto irreal.

²⁰ El punto de inflexión será aquel en el que la derivada segunda (80.2) se hace cero, que, en este caso, es el valor resultante encontrar el valor de α en la ecuación: $-3\alpha^2+3\alpha+m=0$, que es justamente (80.3).

$$(80.3) \quad a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{9+12m}}{6}$$

de los cuales solo el positivo tiene sentido en el problema económico que tratamos puesto que, por hipótesis, $0 < a < 1$. Esto nos asegura que el punto de inflexión (80.3) estará siempre a la derecha del valor máximo posible de la propensión al consumo a y solo valdrá 1 si la propensión a las importaciones m fuera cero, es decir, la economía de la que tratáramos fuera autárquica.

El principio de *saciabilidad* que subyace a este modelo matemático –y a cualquiera que diga que el consumo aumenta con *la renta agregada* pero en menor proporción– obliga a una política económica de fuerte presencia de lo público en la economía siempre que –como ocurre en el modelo– el gasto público y los consiguientes impuestos no vengan determinados exclusivamente por los niveles de renta. Para paliar este defecto del modelo simplificado anterior veremos enseguida un modelo donde los impuestos en parte son autónomos de la renta²¹ y en parte son dependientes de ella.

a-3 - Un neoclásico podría argumentar que todo esto se debe a que no hemos hecho depender los impuestos de la recaudación de la renta y, pareciera, que los impuestos no afectan al multiplicador vía *renta agregada* como consecuencia de una disminución del consumo ante un aumento de los impuestos. Bien, veamos ahora un modelo donde los impuestos en parte son autónomos y en parte dependientes de la renta agregada. Veámoslo:

$$(81) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(82) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T)$$

$$(83) \quad G = T$$

$$(84) \quad I_m = mY$$

$$(85) \quad T = H + bY$$

El resultado de reemplazar las cuatro últimas ecuaciones en la (81) es:

²¹ Piénsese en España la relativa autonomía a corto plazo de las cotizaciones de la Seguridad Social respecto a la renta agregada.

$$(86) \quad Y = \frac{A + I + E_x + (1 - a + a^2)H}{[1 - a + a^2](1 - b) + m}$$

Si ahora hallamos la primera derivada de la producción agregada Y respecto a la propensión al consumo a para obtener el multiplicador sale:

$$(87) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(2a - 1)[mH - (1 - b)(A + I + E_x)]}{[(1 - a + a^2)(1 - b) + m]^2}$$

En (87) vemos que, para que el multiplicador sea expansivo –derivada positiva-, ha de ocurrir, simultáneamente, que la propensión al consumo sea mayor de **0,5** y que se cumpla que:

$$(88) \quad H > \frac{(1 - b)[A + I + E_x]}{m}$$

Y de (88) podemos decir lo mismo que de (80), salvo por el factor corrector $1 - b$ y salvo que el papel que jugaban el monto total de impuestos T , ahora lo juega la parte autónoma H de los mismos. Este factor significa que la exigencia de que los impuestos superen a la parte entre corchetes en (88) del numerador está corregida a la baja. Por ello vamos a calcular también el valor de la función del multiplicador (86) cuando la propensión al consumo a fuera cero y, también, cuando tiende a infinito. Queda:

$$(89) \quad Y(a = 0) = \frac{A + I + E_x + H}{1 - b + m}$$

$$(90) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} Y = \frac{H}{1 - b}$$

Supongamos ahora que el límite de (90) supera el valor de $Y(a=0)$ cuando la propensión fuera cero, es decir, hacemos:

$$(91) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} Y = \frac{H}{1 - b} > \frac{A + I + E_x + H}{1 - b + m}$$

El resultado es:

$$(92) \quad H > \frac{(1-b)[A+I+E_x]}{m}$$

Y el supuesto que hemos hecho en (91) es acertado puesto que (92) es la misma condición (88), que era necesaria para que la primera derivada de la función calculada –el multiplicador– (86) fuera positiva, es decir, para que tuviéramos un multiplicador expansivo. Lo que ocurre cuando hacemos depender al menos parte de los impuestos es que el efecto del multiplicador de la propensión al consumo es menor que cuando ningún impuesto dependía de la renta agregada. Ello se puede ver simplemente comparando la función resultante del multiplicador en (86) con la resultante en (76) cuando hacíamos autónomos todos los impuestos, aunque siempre con equilibrio presupuestario²².

a-4 – Veamos ahora un modelo con *saciabilidad* más problemático, donde el mayor exponente de la propensión al consumo **a** es impar.

$$(93) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(94) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T) + a^3(Y - T)$$

$$(95) \quad G = T$$

$$(96) \quad I_m = mY$$

$$(97) \quad T = H + bY$$

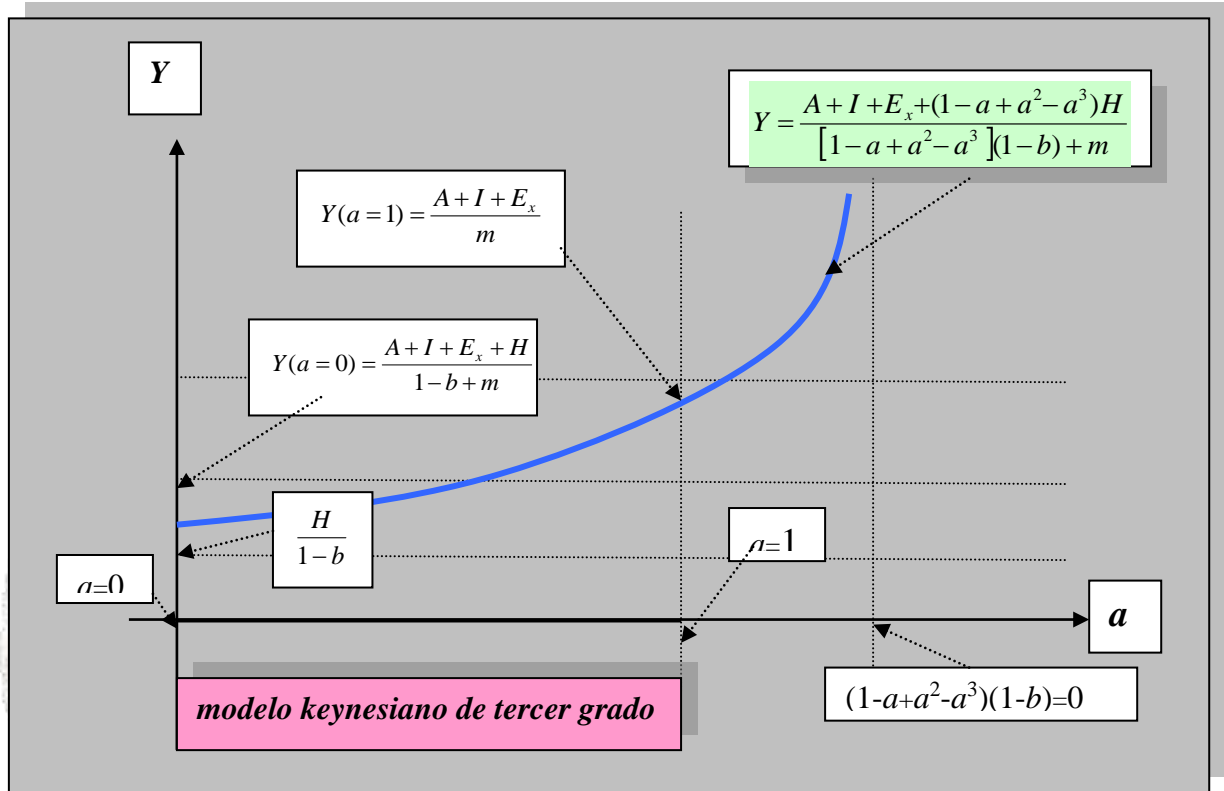
que daría lugar a una función de producción agregada tal como:

$$(98) \quad Y = \frac{A + I + E_x + (1 - a + a^2 - a^3)H}{[1 - a + a^2 - a^3](1 - b) + m}$$

²² El resultado cualitativo sería el mismo con déficit presupuestario, solo que en este caso aparecería un sumando más en el numerador de la función del multiplicador que sería, precisamente, el monto total del déficit. Puede comprobarlo el lector haciendo el supuesto de que $G = T + D$ o $G = H + bY + D$, según los casos, en las ecuaciones de partida que definen el modelo.

Y la primera derivada de **Y** respecto a la propensión al consumo **a** sería:

$$(99) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(-3a^2 + 2a - 1)[mH - (1-b)(A + I + E_x)]}{[(1-a + a^2 - a^3)(1-b) + m]^2}$$



En este caso para cualquier valor de la propensión al consumo **a** entre cero y uno, la expresión **-3a²+2a-1** no tiene un valor positivo, por lo que, para que el multiplicador (99) derivado de la función (98) sea positivo, ha de ocurrir que:

$$(100) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(+3a^2 - 2a + 1)[(1-b)(A + I + E_x) - mH]}{[(1-a + a^2 - a^3)(1-b) + m]^2}$$

Y, como consecuencia:

$$(101) \quad H < \frac{(1-b)[A + I + E_x]}{m}$$

¡para que (100) siga siendo positivo, es decir, expansivo! La conclusión parece fácil de obtener. En estos modelos donde se respecta el principio keynesiano de *saciabilidad* en el consumo, es decir, que el consumo aumenta con *la renta agregada*, pero en proporción menor

que los propios aumentos de la renta según que sea par o impar el último exponente al que hay que elevar la propensión al consumo α , tendremos que ir variando, según el modelo, el signo (entre menor que y mayor que) de los impuestos autónomos H .

Una generalización de la función de consumo sería:

$$(102) \quad C = A + \sum_{t=1}^{t=n} a^t (Y - T)(-1)^{t+1}$$

Desde luego un economista, que usa las matemáticas como instrumento, no puede estar sometido a un ajuste econométrico de un modelo –que es elegido, no lo olvidemos, *a priori*– tan aparentemente peregrino como la paridad del último exponente de una función de consumo tal como:

$$(103) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T) + a^3(Y - T) - a^4(Y - T) + \dots$$

Con una función de consumo con un número finito de sumandos como la anterior nos encontramos con un dilema: si elegimos un número de sumandos cuyo último sumando tenga la propensión al consumo α un exponente par –para tener un efecto expansivo del multiplicador– la relación entre impuestos autónomos H e impuestos dependientes de la renta bY ha de ser:

$$(104) \quad H > \frac{(1-b)[A + I + E_x]}{m}$$

En cambio, si eligiéramos un último exponente impar –porque, por ejemplo, el ajuste econométrico nos diera mejores estimadores e intervalos de confianza– la relación entre ambos tipos de impuestos habría de ser la contraria:

$$(105) \quad H < \frac{(1-b)[A + I + E_x]}{m}$$

si queremos de nuevo que la propensión al consumo tenga un efecto expansivo sobre la producción. Esto no afectaría al monto de impuestos, al que hemos hecho igual al gasto público en el modelo, pero si a la

distribución interna fiscal entre impuestos autónomos e impuestos dependientes de la renta agregada. No conozco que este hecho haya sido planteado de esta manera, aunque los impuestos, por razones evidentes, siempre han contado como elemento –como variable al menos– en los variados modelos formales en los que se ha ido concretando a partir de Kahn las ideas keynesianas. En todo caso el uso de las matemáticas ha facilitado hacer explícito este problema, este elemento decisivo que supone las distintas proporciones entre impuestos que podemos calificar de autónomos y dependientes de la renta. No obstante, también se puede llegar a esta conclusión –aunque sin poder contrastarlo– sin modelo formal porque los impuestos autónomos –al igual que el consumo autónomo o las exportaciones– que no dependen de la renta tienen siempre un efecto expansivo. La razón de ello es la de que sus ¡equilibrios! no dependen de la renta agregada, a diferencia de los impuestos dependientes de la anterior, que siempre van a minorar el impacto expansivo precisamente porque descuentan de la de la renta la necesidad de su financiación (en el caso del gasto público), de las exportaciones (en el caso de las importaciones) o del equilibrio entre ahorro e inversión (en el caso del consumo autónomo).

Si este conjunto de modelos formales pueden corresponderse con la idea de Keynes de un consumo que aumenta con la renta agregada pero en menor medida de lo que ella aumenta, existe la prueba del algodón. De las inecuaciones (104) y (105) podemos concluir que si, la bondad de ajuste econométrico de la función de consumo aumenta a medida que el número de sumandos de (102) aumenta, las dos inecuaciones anteriores deberían converger a una ecuación tal como:

$$(106) \quad H = \frac{(1-b)[A+I+E_x]}{m}$$

si se quiere que la propensión al consumo α tenga un efecto expansivo sobre la producción agregada Y (multiplicador). Por lo tanto, el monto de impuestos no dependientes de la renta H y el coeficiente b que multiplica a la renta agregada Y , serían los óptimos desde el punto de vista del multiplicador. Dicho de otra forma, una economía avanzada, que trabajara con presupuesto equilibrado y que quisiera dar un efecto multiplicador a los impuestos, debería establecer una relación entre impuestos (y cotizaciones) autónomos y dependientes de la renta agregada tal que respetara la ecuación (106). ¡Y eso sería así independientemente del monto total de impuestos T recaudados²³!

²³ Esta conclusión es incompatible con las concepciones macroeconómicas neoliberales (si es que existen como tales) de la economía.

En el caso hipotético de que se hubieran empleado funciones de consumo, de impuestos y de importaciones generalizadas del epígrafe VI:

$$(107) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(108) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T) + a^3(Y - T) - a^4(Y - T) + \dots$$

$$(109) \quad G = T + D$$

$$(110) \quad I_m = B + mY - m^2Y + m^3Y - m^4Y + \dots$$

$$(111) \quad T = H + bY - b^2Y + b^3Y - b^4Y + \dots$$

se obtendría:

$$(112) \quad H = \frac{(1 - b + b^2 - b^3 + \dots)[A - B + I + E_x + D]}{m - m^2 + m^3 - \dots}$$

$$(112) \quad H = \frac{[A - B + I + E_x + D] \sum_{t=0}^{n-1} b^t (-1)^t}{\sum_{t=1}^n m^t (-1)^{t-1}}$$

Todo lo anterior, todas las condiciones anteriores tienen su razón de ser porque estamos suponiendo –siguiendo a Keynes– que la propensión al consumo α debe tener un efecto expansivo sobre la producción agregada, y todo el presente trabajo gira sobre las condiciones que deben cumplir las propensiones a consumir α , a importar m y, sobre todo, la composición y división de los ingresos fiscales y cotizaciones entre autónomos y dependientes de la renta agregada.

No hemos distinguido en todo este trabajo entre corto, medio y largo plazo, porque puede muy bien entenderse que, unos aumentos de impuestos a corto plazo que no hiciéramos dependientes de la renta (una decisión de un gobierno), podría resultar a medio o a largo plazo

como dependientes, al menos parcialmente, en períodos posteriores²⁴. Pero en este trabajo, que ha de ser breve, no entramos en esta temática.

IX – En todas las variantes formales anteriores de la función de consumo –siempre siguiendo a Keynes– hemos hecho depender el consumo de la renta disponible, es decir, de salarios, ganancias, rentas autónomas y cotizaciones (de lo equivalente a la Seguridad Social española en el caso de existir), menos los impuestos. Sin embargo esto parece limitado. De hecho se ha hecho depender también de la riqueza (efecto riqueza), de las variaciones de la renta (multiplicador), etc. Keynes, no obstante, se limitó básicamente en su modelo a la renta disponible como causa del consumo. Pero en el capítulo 10, epígrafe III de la *General Theory*, cuando habla de lo que llama ahorro negativo (consumo a partir del crédito), nos dice que “... estos actos de ahorro negativo reducirá la propensión marginal a consumir...”. De lo cual, se deduce que el ahorro (positivo) propiciará el consumo. Y ello es más que razonable. Es muy posible que Keynes no incluyera en el núcleo duro (capítulo 8) esta variable debido a que consideraba que el ahorro no era la causa de la inversión –uno de sus supuestos revolucionarios en la teoría– sino la consecuencia del consumo y el efecto de éste sobre el multiplicador. Keynes, a diferencia de Sraffa, se manejaba con soltura en todo tipo de matemáticas²⁵, por lo que no debiera ser las complicaciones formales que conlleva, como veremos, hacer depender el consumo también del ahorro (que es la diferencia entre lo que se produce y lo que, a su vez, se consume). A pesar de que su libro no es breve sí lo son sus supuestos: breves, escogidos y meditados. Nosotros, en este epígrafe, vamos a hacer depender la función de consumo, no solo de la renta disponible, sino del ahorro, entendido como diferencia entre la producción (representada por Y , que es también la renta agregada en todos los supuestos) y el consumo. Por lo tanto la función de consumo en este supuesto –en el que se mantiene el principio de *saciabilidad* y que consideremos el fundamental del presente trabajo– es:

$$(113) \quad C = A + a(Y - T) - a^2(Y - T) + u(Y - C)$$

²⁴ La distinción entre corto, medio y largo plazo son problemáticas en economía porque los hechos, las decisiones que los individuos y la sociedad en su conjunto acometen, son continuos en el tiempo. Creo que esta distinción, que es fundamentalmente una herencia de Marshall, debiera ser eliminada de las hipótesis y modelos económicos. Las decisiones económicas se toman de forma descentralizada al menos en la parte no dependiente de los poderes públicos, se toman de forma continua y nunca de forma acordada, incluso aunque se produzca a veces el llamado “efecto rebaño”, efecto que, por otra parte, parece indispensable para explicar crisis, recesiones y ciclos.

²⁵ En su bibliografía tiene un libro que tituló *A Treatise of Probability*, 1921.

Por supuesto que el consumo C que hay en la expresión $u(Y-C)$ debiera ser el de un período anterior, pero suponemos que estamos en equilibrio y que el consumo de ambos períodos permanece constante, lo cual es un supuesto bastante realista²⁶. Además u sería la propensión a consumir del ahorro dado que la diferencia $Y-C$ lo representa. El modelo lo completarían ecuaciones que ya hemos visto:

$$(114) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m$$

$$(115) \quad G = T$$

$$(116) \quad I_m = mY$$

$$(117) \quad T = H + bY$$

Aunque laborioso, el conjunto de ecuaciones anteriores da lugar al multiplicador:

$$(118) \quad Y = \frac{A + (1+u)(I + E_x) + (1-a+a^2+u)H}{[1-a+a^2](1-b) + (1+u)m - ub}$$

Si calculamos la derivada de (118) obtenemos:

$$(119) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(2a-1)[(1+u)m - u]H - (1-b)[A + (1+u)(I + E_x)]}{[(1-a+a^2)(1-b) + (1+u)m - ub]^2}$$

Y , de forma análoga que en los epígrafes anteriores donde considerábamos que el exponente más alto al que está elevado la propensión al consumo a es par en la función de consumo, para que el multiplicador sea expansivo se ha de cumplir dos condiciones. La primera –que no reviste problema empírico– que esa propensión a consumir a sea mayor que el 50% de la renta agregada; la segunda²⁷ ha de cumplir que:

²⁶ De no hacerlo así, además, estaríamos ante una ecuación diferencial (en diferencias finitas) y no es la pretensión de este breve trabajo entrar en más complicaciones formales.

²⁷ También ha de cumplirse que el denominador de (120) sea mayor de cero, que implica que $u < m/(1-m)$, lo cual no podía preverse, sin el uso de las matemáticas, de que, para que existiera un multiplicador expansivo de la propensión al consumo a , la propensión al ahorro u ha de estar acotada en función de la propensión a importar m , al menos según el modelo. En el caso de que se cumpliera con signo de desigualdad

$$(120) \quad H > \frac{(1-b)[A+(1+u)(I+E_x)]}{(1+u)m-u}$$

Si la contrastación empírica es coherente con (120), la función (118) es una función creciente si α supera ese **50%**. Tiene su punto de inflexión y la función pasa de crecientemente creciente a decrecientemente creciente a partir de un cierto momento (en el punto de α en el que la segunda derivada se hace cero), pero vamos a ahorrar al lector hallarla. Si α tiende a infinito la función tiende, como es habitual, a:

$$(121) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} Y = \frac{H}{1-b}$$

Por ello, la función pasa de crecientemente creciente a decrecientemente creciente si se cumple que:

$$(122) \quad \frac{H}{1-b} > \frac{A+(1+u)(I+E_x+H)}{(1-b)+(1+u)m-ub}$$

dado que:

$$(123) \quad Y(a=0) = Y(a=1) = \frac{A+(1+u)(I+E_x+H)}{(1-b)+(1+u)m-ub}$$

La inecuación (122) nos da, despejando el componente autónomo de los impuestos H :

$$(124) \quad H > \frac{(1-b)[A+(1+u)(I+E_x)]}{(1+u)m-u}$$

La inecuación (124) da la relación que ha de establecerse –según el modelo– entre los impuestos autónomos H y los dependientes bY con el

contrario, también habría de ser contrario el signo de desigualdad de (120) para mantener un efecto expansivo, es decir, para que la derivada de Y respecto a α sea positivo.

fin de que el gasto público **G** (que es igual a $T=H+bY$ puesto que hemos hecho el supuesto de equilibrio presupuestario) contribuya al multiplicador, es decir, que sea un elemento expansivo de la producción agregada²⁸, junto con las inversiones privadas **I**, el consumo autónomo **A** y las exportaciones **E_x**. Todos los modelos que hemos visto en epígrafes anteriores, bajo diversas hipótesis, mantienen una constante conceptual más allá de las concreciones matemáticas según supuestos: que el efecto expansivo posible de los impuestos, incluso con equilibrio presupuestario, depende de ciertas relaciones que han de establecerse entre impuestos autónomos e impuestos dependientes de la renta agregada. Lo cual lleva a que las medidas económicas de gasto público serán siempre expansivas si nos hemos asegurado previamente de relaciones particulares –acotaciones– entre tipos de impuestos (autónomos y dependientes de la renta agregada) que van a financiar el gasto ¡independientemente de cuál sea su nivel!

X – En este epígrafe vamos a dar un paso más en la interpretación del modelo keynesiano. Hasta ahora hemos sido ortodoxos en la interpretación de la *General Theory* por mas sorprendente que parezca. Hasta ahora hemos supuesto que la producción agregada, la renta agregada y el consiguiente gasto pueden ser interpretados por la misma magnitud **Y** porque son iguales²⁹. Sin embargo queremos recoger en este epígrafe el hecho generalizado a estas alturas del siglo de que las diferentes clases de rentas obtenidas –salariales, pensiones, ganancias, de autónomos, etc.– no son suficientes para comprar todo lo que las empresas quieren vender dada la tecnología existente. Tecnología y formas de organización eficientes del trabajo a los que no se puede renunciar por mor de la competitividad y la necesidad de crear un excedente. Por ello vamos a suponer que es ya un hecho estructural de la economía que el conjunto del valor de los bienes y servicios producidos **Y** supera nuestra capacidad de gasto debido a que las rentas derivadas del solo mercado son insuficientes. Dicho de otra forma, vamos a suponer y modelizar este hecho diciendo que la renta disponible para el gasto es la diferencia, no solo del valor de los bienes y servicios producidos **Y** y los impuestos **T**, sino también de una magnitud **Q** que va a indicar la diferencia entre lo que se produce y la capacidad de gasto involuntario. Esto va a cambiar nuestra función de consumo de la siguiente manera:

²⁸ También si trabajamos con déficit ($G=T+D$) se cumple todo lo anterior, especialmente el efecto expansivo. La limitación del déficit no aparece en este modelo puesto que trabajamos, siguiendo a Keynes, con variables desmonetizadas (Keynes en términos de salarios), pero suponemos que los déficits, tarde o temprano, han eliminarse, lo cual no anula los posibles efectos expansivos sobre la producción agregada en los modelos con los que hemos trabajado. Pero, en fin, este es harina de otro costal y no entramos en ello.

²⁹ Se deja fuera de lugar si se trata de una definición o encierra una situación de equilibrio para no entrar en una discusión que llevaría muchas más páginas.

$$(125) \quad C = A + a(Y - T - Q) - a^2(Y - T - Q) + u(Y - C - Q)$$

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la ecuación del consumo (125) más la ecuación (131) de los impuestos, la relación entre las macromagnitudes quedaría como:

$$(127) \quad C = \frac{A}{1+u} + \frac{[(a-a^2)(1-b)+u]Y}{1+u} - \frac{[a-a^2+u]Q}{1+u} - \frac{[a-a^2]H}{1+u}$$

El resto de las ecuaciones del modelo son las mismas que las del anterior epígrafe:

$$(128) \quad Y = C + I + G + E_x - I_m + Q$$

$$(129) \quad G = T$$

$$(130) \quad I_m = mY$$

$$(131) \quad T = H + bY$$

El resultado de estas cinco ecuaciones es una función del multiplicador tal como:

$$(132) \quad Y = \frac{A + (1+u)(I + E_x) + (1-a+a^2+u)H + (1-a+a^2)Q}{[1-a+a^2](1-b) + (1+u)m - ub}$$

Vemos en (132) que si la magnitud **Q** que recoge el desequilibrio en la producción Y la capacidad de gasto fuera cero volveríamos a la ecuación (118). Ahora estamos interesados –al igual que en epígrafes anteriores– en cómo debiera ser la relación entre impuestos autónomos e impuestos dependientes de la renta para que el efecto del complejo multiplicador –que dependen del denominador de (132)– fuera expansivo ante aumentos³⁰, por ejemplo, del gasto, las inversiones, las exportaciones. Para ver estos efectos, vamos a calcular la derivada

³⁰ El hecho de que no aparezca explícito en (132) el gasto público no significa que no tenga influencia. La razón matemática de que no esté a la vista es porque hemos supuesto siempre equilibrio presupuestario, de tal forma que **G=T**.

primera de Y respecto a la propensión al consumo a como venimos haciendo a lo largo del presente trabajo y queda:

$$(133) \quad \frac{dY}{da} = \frac{(2a-1)[[(1+u)m-u]H - (1-b)[A + (1+u)(I + E_x)] + [(1+u)m - ub]Q]}{[(1-a+a^2)(1-b) + (1+u)m - ub]^2}$$

Al igual que en epígrafes anteriores, la primera condición para que exista un efecto expansivo del multiplicador es que la propensión al consumo a sea superior al 50% de la renta disponible –en este caso, de $Y-T-Q$ –, lo cual es acorde con la experiencia empírica. La segunda es la de que los impuestos que hemos llamado autónomos H sean tales que supere:

$$(134) \quad H > \frac{(1-b)[A + (1+u)(I + E_x)] - [(1+u)m - ub]Q}{(1+u)m - u}$$

Y como quiera que el numerador³¹ de la inecuación (134) ha de ser positivo, ha de cumplirse que:

$$(135) \quad b < \frac{[A + (1+u)(I + E_x)] - (1+u)mQ}{A + (1+u)(I + E_x) - uQ}$$

Entre (134) y (135) vemos cómo de nuevo se repite que no con cualquier relación entre impuestos autónomos H e impuestos dependientes de la renta (dado por el factor b) produce un efecto expansivo la propensión al consumo a sobre la producción Y . Pero, en general, podemos decir que cuanto mayor sean los impuestos autónomos respecto a los dependientes de la renta, más probable sea que, primero, se de el deseado efecto expansivo, segundo, que tendrán un efecto expansivo sobre la producción.

Pero (135) nos dice algo más: nos da las condición que ha de cumplir Q –que nos da el desequilibrio entre producción y capacidad de gasto–

³¹ También ha de cumplirse que el denominador de (134) ha de ser positivo, es decir, que ha de darse que $(1+u)m > u$, lo cual supone que $m > u/(1+u)$. En el caso de que fuera al revés, todas las relaciones con las se especula en (134), (135) y (138) han de ser de signo contrario. También ha de cumplirse que el denominador de (135) ha de ser positivo, por lo que sobre el cual hacemos las mismas consideraciones sobre los signos de inecuación que las hechas en el párrafo anterior.

para que el factor b de los impuestos dependientes de la renta permitan un multiplicador positivo, es decir, que se de un efecto expansivo sobre la producción agregada Y . Estas son que se den simultáneamente:

$$(136) \quad Q < \frac{[A + (1+u)(I + E_x)]}{(1+u)m}$$

$$(137) \quad Q < \frac{[A + (1+u)(I + E_x)]}{u}$$

Lo cual marca también un límite a esa diferencia entre producción y gasto, aunque también puede darse el efecto expansivo si, simultáneamente, los dos signos de desigualdad de (136) y (137) son de signo contrario, porque todo ello depende del numerador y del denominador de (135).

Las hipótesis mantenidas en este epígrafe no son peregrinas –al menos esa es la pretensión– y representan una verdadera generalización del modelo keynesiano. La primera de ellas es la de que el consumo no solo depende de la renta disponible sino que lo hace también del ahorro. Este supuesto está en Keynes –de forma tímida– aunque no se haya generalizado en los modelos al uso. La segunda es la de que existe una diferencia estructural entre la producción agregada y la capacidad de gasto. Esto no está en Keynes y, menos aún, con la consideración hecha en este epígrafe de situación estructural de las economías. Este último supuesto se debe a que también consideramos estructural los procesos de informatización y robotización parcial del trabajo en todo el planeta, aunque con muy diferentes grados de penetración e intensidad. Lo que se propone con ello en este trabajo es un paso adelante desde una mera interpretación abierta y generosa de la *General Theory*. Su necesidad se deriva de que, de no hacerlo, los avances que supuso y aún suponen el texto del economista inglés podrían quedar obsoletos intelectualmente, más allá de los ataques ideológicos que desde el frente neoliberal se hayan producido y se seguirán produciendo.

XI - Resumen y conclusiones

Después de todas las consideraciones anteriores y de los anteriores epígrafes, la conclusión es la de que este modelo de función de consumo *saciable* –conceptualmente es la que defiende Keynes– la parte autónoma de los impuestos no dependientes de la renta agregada tiene un efecto multiplicador sobre la renta y, por ende, sobre el empleo. Con este paradigma extraído desde el mismo corazón

de la *General Theory*, un modelo de intervención pública en la economía mediante impuestos y –en nuestro caso español, también las cotizaciones que son un impuesto sobre las rentas salariales– tiene un efecto expansivo sobre la renta agregada siempre que la relación entre parte autónoma de los mismos y parte dependiente de la renta cumpla requisitos como son los de las inecuaciones (79) y (91), según modelo. Y todo ello frente al paradigma neoclásico que reniega de todo lo público y lo deja todo al albur del mercado. Con el modelo expuesto y explicitado mediante algunos ejemplos como los vistos aquí, los principios de *saciabilidad* en el consumo, de toma de impuestos y gasto público correspondientes –con o sin equilibrio presupuestario– son compatibles con efectos expansivos de la renta agregada. Más aún, estos últimos son los efectos de los primeros frente a las consideraciones neoclásicas en estas mismas situaciones. Las concreciones formales de estas ideas pueden ser múltiples, pero la idea de que los impuestos no dependientes de la renta tienen efectos multiplicadores bajo el principio de *saciabilidad* keynesiano en el consumo no puede por más tiempo quedar relegada bajo la bruma neoliberal –neoclásica en lo intelectual– del solo mercado, predominante en el mundo académico. Arrancando desde el mismo corazón de la *General Theory*, hemos demostrado que, con el principio de *saciabilidad* en la mano, los efectos que se extraen de la obra de Keynes son distintos de los divulgados en el modelo **IS-LM**, por poner un ejemplo, y de algunos de los considerados *post*, *neo* y *neo-neo-keynesianos*³² al uso. Distintos, no contrarios.

Un breve resumen y conclusión de los aspectos económicos de todo lo anterior sería: 1) que los modelos lineales de propensión al consumo de los que se derivan el multiplicador, aunque cómodos, son contrarios al espíritu y letra de la *General Theory*; 2) que, por tanto, la crucial función de consumo que debe definir un modelo keynesiano ha de ser decrecientemente creciente respecto a la renta agregada; 3) que no necesariamente en todo los tramos de la propensión al consumo el efecto va a ser multiplicador, porque ello va a depender de otros aspectos del modelo como son las importaciones (dependiente o no de la renta agregada) y, sobre todo, de la relación entre impuestos autónomos e impuestos dependientes de la renta; 4) que el modelo matemático que se utilice debe estar al servicio de estas ideas y no al revés, y ello no es tan sencillo como en el caso de las funciones lineales de consumo que aparecen en la mayor parte de los libros de texto de la economía.

³² Para un estudio histórico de las distintas escuelas y/o modelos keynesianos véase *La crisis de la macroeconomía*, libro que ya hemos mencionado en notas anteriores y que está en la bibliografía. También el libro de Marc Lavoie, *L'économie postkeynésienne*, 2004, que analiza, aunque someramente, las distintas variantes postkeynesianas. Para un estudio sobre la obra de Keynes el libro de Robert Skidelsky *El regreso de Keynes*, 2009 (*The Reuters of de Master*, 2009).

El problema en términos económicos se presenta así: un aumento del consumo, inversión o gasto público tiende a aumentar en mayor grado la producción agregada, pero los impuestos y las importaciones tienden a aminorarla. Hasta ahí nada nuevo. Resulta más problemática la cuestión cuando dividimos la financiación del gasto público –y lo mismo ocurriría con la inversión privada si aquí no la hubiéramos hecho autónoma en todas las variantes del modelo– en impuestos *autónomos* e impuestos *dependientes* de la renta agregada, porque la composición relativa entre ambas sí va a condicionar el multiplicador. Si los impuestos fueran enteramente autónomos, podríamos acomodar su cuantía –al menos en el aspecto formal y no socioeconómico– de tal manera que tuviera siempre un efecto expansivo (multiplicador) sobre la renta agregada. Pero este supuesto no es realista, por lo que deberemos al menos dividir los impuestos según que tengan al menos una autonomía relativa y otros impuestos dependientes de la renta agregada. Y, dado que los impuestos que financian el gasto –al igual que las importaciones “financian” (compensan) las exportaciones–, tienen un signo negativo en el multiplicador, resulta crucial la composición interna de los impuestos (y las cotizaciones): cuanto más autónomos sean de la renta agregada mayor será el efecto de la propensión al consumo α sobre el multiplicador. Hemos visto que, con estos modelos matemáticos de *saciabilidad*, el efecto expansivo de los impuestos autónomos se da cuando sobrepasan ciertos límites –contrariamente a las concepciones neoclásicas de la economía–, aunque siempre aminoran el efecto multiplicador los impuestos dependientes de la renta agregada. Pero también se concluye que, si los modelos expuestos en este trabajo son acertados, no se puede afirmar que cualquier nivel de impuestos autónomos tengan un efecto multiplicador sobre la renta! (y suponiendo, además, que la propensión al consumo supera el 50% de la renta agregada). Hemos visto en este trabajo repetidamente cómo están acotados –para que den efectos multiplicadores– los impuestos en función de los componentes autónomos del consumo, la inversión privada, las exportaciones, el déficit si lo hay, la propensión a importar y la dependencia sobre la renta agregada de los propios impuestos no autónomos. Y la conclusión más “revolucionaria” de estos modelos es la de que los impuestos, los que sean autónomos, si se mantienen dentro de unos márgenes de una distribución interna entre impuestos autónomos e impuestos dependientes de la renta, tienen siempre un efecto multiplicador sobre la producción agregada. En caso contrario, los efectos pueden ser desmultiplicadores. ¡Dicho de forma resumida, no cualquier proporción entre impuestos autónomos y dependientes de la renta tienen un efecto positivo –expansivo– sobre la producción agregada! Por ello los gobiernos deben saber en cada momentos esta situación para medir sus política de financiación del gasto a través de los impuestos (y de las cotizaciones), ¡sea cual se el nivel del gasto! Lo que es incuestionable es

que los países más desarrollados son aquellos precisamente que tienen una fuerte participación de lo público en el conjunto de la economía y los que mejor se han defendido ante recesiones, crisis y ciclos económicos. Estos modelos desarrollados en el presente trabajo, aunque originales en la medida de lo posible y que arrancan desde el mismo corazón de la *General Theory*, son coherentes con las políticas keynesianas desarrolladas desde la II Guerra Mundial hasta la mitad de los años 70 del siglo pasado. Y, en general, siempre han servido para combatir los períodos de depresión y recesión allí donde se han implementado. Este trabajo, si alguna virtud tiene o pretende tener, es precisamente hacer coherente una específica modelización de la teoría keynesiana con la experiencia histórica. Y pretende, simultáneamente, que esa modelización debería ser una interpretación ortodoxa porque arranca desde la literalidad del texto capital de Keynes.

No todos los problemas económicos del mundo actual pueden solucionarse con las recetas derivadas de la *General Theory*, ni siquiera con un keynesianismo actualizado. Keynes no pudo prever la informatización de la información, ni la robotización parcial del trabajo, ni la llamada globalización, que es en realidad una *deslocalización* a nivel planetario³³. Vamos a un mundo donde el trabajo será un bien escaso y donde las rentas no salariales, los ingresos mínimos, etc., serán básicos para sostener la demanda. Todo esto no está en la *General Theory*³⁴ pero sí nos dio recetas para abordar las recesiones y para ciclos económicos en sus momentos bajos. No hay recetas alternativas porque

³³ Llamar *globalización* al proceso de *deslocalización* que se ha producido desde hace tres décadas en el planeta es el mayor error conceptual y lingüístico que nunca he contemplado.

³⁴ Pero, curiosamente, sí está en Keynes. En 1930, en una conferencia del propio Keynes que titulaba *Las posibilidades económicas de nuestros nietos*, dice que "... el término hace referencia al desempleo debido a nuestro descubrimiento de medios para economizar el uso del factor trabajo, un descubrimiento que sobrepasa el ritmo con el que podemos encontrar nuevos empleos para la fuerza de trabajo disponible". Este fantasma está presente en el mundo actual –además muy interconectado– que ha hecho que el trabajo sea un hecho escaso por el lado de la oferta, es decir, por el hecho de que los empresarios –y posibilidades de trabajo autónomo– no necesitan para sus empresas el trabajo disponible. En cambio sí necesitarían unas rentas suficientes –del trabajo, de pensiones, rentas mínimas y básicas, ganancias, etc. –de las cuales se derivaran la demanda suficiente como para que puedan vender las empresas sus bienes y servicios producidos. Hoy día estas rentas, derivadas exclusivamente del mercado, no son suficientes. Estos hechos, que Keynes atisbaba hace casi un siglo para su mundo desarrollado, hoy es un fenómeno mundial, dramático e inaplazable. La solución neoliberal de que solo tengan rentas los que encuentren trabajo y los pensionistas (cuando los hay) ya no parece suficiente dado los niveles de informatización de la información y el conocimiento más la robotización parcial del trabajo. Y dado que no podemos renunciar a los dos anteriores (informatización y robotización) porque son imprescindibles para crear excedente, la solución que Keynes atisba –que es la idea de *la demanda efectiva*– debe ser completada con modelos que incluyan este déficit de las rentas salariales.

las neoliberales de cátedra³⁵ son la pasividad de las Administraciones. Pero es imperativo actualizar el discurso keynesiano, actualizar su lenguaje lleno de concesiones al marginalismo, a Marshall, a Pigou, a las obsesiones por los equilibrios; limpiarlo de interpretaciones erróneas, adulteradas, interesadas.

Apéndice: reflexiones matemáticas

Difícilmente se podría haber llegado a todas estas conclusiones sin la concreción formal (matemática) de las ideas keynesianas. A lo más que podríamos llegar es a concluir la dirección en la que van las variables dependientes -que recogen los conceptos económicos- en función de las independientes. Pero con ser ello importante no es lo suficiente para poder acotar las relaciones entre variables para producir según qué efectos deseados o deducidos del modelo. La limitación de todo ello es que todo depende del modelo elegido *a priori*, razón por lo cual éste ha de ser lo más acertado posible. Pero sin concreción del modelo nos quedamos en los fundamentos, lo cual tiene dos defectos: no avanzamos en la relación entre variables no explícitas en el modelo y nunca podremos comprobar relaciones cuantitativas entre las variables mediante la contrastación empírica. Desde que Jules Dupuit (1804-1866) y Antoine A. Cournot (1801-1877) metieron el demonio de las matemáticas en esta ciencia social ya no hay forma de escapar de él. El que vio bien todo esto fue Kalecki, que fundió en sus obras directamente los conceptos con las posibles relaciones formales entre las variables en las que concretaba su modelo. Keynes, en cambio, permaneció más en los fundamentos, de ahí muchas de sus interpretaciones, algunas interesadas, otras erróneas, otras contrarias a sus propias palabras. Kahn formalizó las ideas de Keynes (el multiplicador) y Hicks las deformó definitivamente (modelo de ¿equilibrio? IS-LM). Por ello, en este trabajo, hemos partido del propio texto capital de Keynes, recogiendo sus palabras en la medida que éstas representaban el núcleo duro de su obra y no meros comentarios susceptibles de ser tergiversados, como ha ocurrido con tanta frecuencia (las desviaciones que hemos denunciado a lo largo de este trabajo).

Otra cuestión siempre latente y no siempre explícita trata de la necesidad o no del uso de las matemáticas en las llamadas "ciencias" sociales y si esa necesidad es equiparable a la de las ciencias llamadas *duras* o físicas. En términos generales la cuestión no es si se puede elegir o no, sino de añade *cientificidad* su uso y si las ciencias sociales son tan determinísticas o no en la separación entre variables y la relación entre

³⁵ Otra cosa son las reconversiones al intervencionismo cuando muchos neoliberales llegan a puestos de responsabilidad en las instituciones, grandes empresas y empresas financieras.

éllas. En cuanto a la primera cuestión aquí se sostiene que el uso de las matemáticas en las ciencias sociales no añade –pero tampoco quita– un ápice de científicidad o de veracidad porque eso está en la capacidad o no de contrastación empírica. No obstante, lo que es incuestionable es que permite asegurar relaciones entre variables – variables como recolectoras de fenómenos sociales– a veces insospechadas, cosa que hemos visto en este trabajo. También permite evitar yerros de razonamiento. La segunda cuestión es más problemática y es el eterno debate, no solo científico sino también filosófico, sobre el determinismo, aún con el peligro de caer en el debate en un mero escolasticismo. La cuestión que se plantea en las ciencias económicas en particular –sobre todo a partir precisamente de Keynes– es el del cómo medir el grado de incertidumbre en las variables que suponen toma de decisiones para colectivos humanos. Por ejemplo, en la toma de decisiones –siempre descentralizadas– en las inversiones. Menos problemática parece la toma de decisiones en el consumo porque, empíricamente, se comprueba una cierta constancia a lo largo del tiempo, con procesos de sustitución durante las crisis pero siempre de forma atenuada. Para las inversiones Keynes llamó a estas incertidumbres los *animal spirits*, de difícil traducción (salvo la literal), pero podemos adjetivar la expresión con términos como caprichosos, inciertos, insospechados, etc. La cuestión es: ¿cómo podemos traducir en términos matemáticos estas incertidumbres en la toma de decisiones en las ciencias sociales en general y en la economía, en particular? Se me ocurren tres maneras: la primera no es, desde luego, nada original, y trata de utilizar modelos probabilísticos, donde algunas variables son aleatorias. Ello significa que sus valores concretos están sujetos a intervalos de confianza con cierto grado de probabilidad. En este trabajo no se ha trabajado con este tipo de matemáticas. La segunda manera consiste en trabajar con sistemas de ecuaciones para los modelos donde el número de variables supera al de esas ecuaciones. Ello supone infinitos *grados de libertad* para el valor de las variables, tanto para las exógenas como para algunas endógenas. Con estos modelos aquí se ha trabajado, a diferencia, por ejemplo, de los modelos de equilibrio general que, desde Walras a los más modernos como los de Debreu, Arrow y Hahn o los de Balasko, tratan de encontrar soluciones a las variables porque parten siempre y de forma sospechosa, de igual número de ecuaciones que de incógnitas³⁶. Todo lo contrario que el modelo con el que trabajó Sraffa en su obra *Producción de mercancías por medio de mercancías*, donde siempre existe un grado al menos de libertad que permite ir variando ganancias y salarios, aunque siempre de forma acotada y en relación inversa entre unas rentas y otras. También en Kalecki hay más variables que incógnitas en sus hipótesis, o en Schumpeter, donde su tesis general de

³⁶ Aunque eso no asegura una única solución y, para evitarlo, siempre ha de cumplirse el teorema de *Rouché-Frobenius*, pero entrar en ese tema sería alargar la cuestión demasiado.

la destrucción creativa es difícil –por no decir imposible– de formalizar (lo cual es un terrible inconveniente para su contrastación empírica pero no un imposible). Para Marx y la posible *matematización* de sus hipótesis y conclusiones me remito a las obras de Michio Morishima. La tercera manera de abordar la dificultad de meter la cuña matemática es, como aquí se ha abordado (mejor concluido) trabajar con *acotaciones* inevitables como consecuencia de establecer, a su vez, *acotaciones* para los valores de las variables exógenas, cosa que en el presente trabajo se ha hecho –siguiendo a Keynes y el sentido común– para la *propensión al consumo*, la *propensión a importar* o la *propensión del gasto sobre el ahorro*. Por resumir, variables aleatorias, grados de libertad y acotación del valor de las variables (en las hipótesis y las sobrevenidas en las conclusiones), son maneras de abordar formalmente decisiones de los individuos en las sociedades que no son ni determinísticas ni enteramente aleatorias, sino que más parecen de las llamadas *decisiones rebaño*. Para el estudio de la Historia no necesitamos las matemáticas –aunque sí las estadísticas–, pero para las ciencias sociales sí porque, de lo contrario, pasan dos cosas: no son ciencias ni podemos cambiar, entonces, el mundo que nos rodea porque no sabríamos cómo influirían los actos deliberados desde lo público de la política económica. Pero ello tiene un coste intelectual y el de que nunca podremos predecir a satisfacción los comportamientos de los individuos en la sociedad, pero sí podremos predecir las *acotaciones* de sus extremos. Algo es algo.

Bibliografía

Álvarez, A., Arándiga, M. A., Nieto, F. J., Sanz, J.: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, 2001, UNED, Madrid.

Assous, M. y Gallardo, J.L.: “Génesis y Originalidad de la Teoría de Kalecki”, 2008, revista Circus, UBA, Buenos Aires.

Azcurra, H.: “La Teoría de la Distribución del Ingreso de Kalecki”, revista Circus, 2008, UBA, Buenos Aires.

Ballesteros, E.: “Introducción a la teoría económica”, 1988, Alianza Universidad. Textos.

Barber, W.J.: “Historia del pensamiento económico”, 1974, Alianza Universidad [A History of Economic Thought, 1967, Penguin Books]

Bidard, Ch., Poulon, F., Hendaoui, F.: "Keynes & Sraffa", 1998, Editor: Cujas.

Blanchard. O.: "Macroeconomía", 2000, edit. Prentice-Hall, (*Macroeconomics*, 2000).

Bronson, R.: "Investigación operativa", 1983, serie Schaum, edit. McGraw-Hill.

Carter, S., Davis, J., Naldi, N., Lattanzi, E., Schefold, B., Lazzarini, A. Brondino, G., Morra, L.: *Research in the History of Economic Thought and Methodology*, 2017, (Including a Symposium on New Directions in Sraffa Scholarship, Volume 35B), edited by Scott Carter and Riccardo Bellofiore, Editor: Emerald Publishing Limited.

Chiang, A.C: "Fundamental Methods of Mathematical Economics", 1987, McGraw-Hill; "Métodos fundamentales de la economía matemática", 1987, McGraw-Hill de México.

Dobb, M.: "Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith", 1975, edit. Siglo XXI editores (primera edición en inglés, 1973, Cambridge U. Press). Internet: <https://fundamentosdepoliticaeconomica.files.wordpress.com/2014/09/dbbmauric.pdf>

Dorfman, R, Samuelson, P.A., Solow, R.M.: "Programación lineal y análisis económico", 1964, edit. Aguilar.

Dowling, E.T.: "Matemática para economistas", 1982, McGraw-Hill.

Friedman, M.: "Paro e inflación", 1977, Unión Editorial.

Fiorito, A.: "La implosión de la economía neoclásica", 2007, Edition: Teoría Económica, Publisher: Ediciones Cooperativas, ISBN: 978-987-1246-49-6, internet: www.geocities.com/aportexi/sraffa12.pdf

García, N.E.: "La crisis de la macroeconomía", edit. Marcial Pons, 2010.

Gehrke, Ch. y Salvador, N.: "Keynes, Sraffa an the Criticism of Neoclassical Theory", 2011, edit. Routledge, New York.

Harcourt, G.: "El Pensamiento Económico Heterodoxo del Siglo XX", 2008, revista Circus, UBA, Buenos Aires.

Johnson E. y Moggridge D.: "John Maynard Keynes. Política y futuro. Ensayos escogidos", 2013, edit. Página Indómita.

Lavoie, M.: "L'économie postkeynésienne", 2004, Éditions La Découverte. (La economía postkeynesianas, 2005, edit. Icaria).

Kurz, D. Heinz: "The Hayek-Keynes-Sraffa controversy reconsidered" (*Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*, 2000, Cambridge University Press, pags. 257-304, Cambridge UK).

Montalvo, M.: "Keynes 20:09 (Cultura económica y crisis)", 2010, edit. Tecnos.

Mora Plaza, A.: "La función de consumo de Keynes sobre fundamentos esraffianos", 2011, publicado en la pág. web de la U. de Málaga, (eumed.net/Contribuciones a la Economía, febrero 2011)

Mora Plaza, A.: "Modelo integrado Keynes-Sraffa", 2011, Publicado en la pág. web de la U. de Málaga, (eumed.net/Contribuciones a la Economía, marzo 2011).

Pulido, A. y Fontela, E.: "Análisis Input-Output, modelos, datos y aplicaciones", 1993, edit. Pirámide.

Ranchetti, F.: "On the relationship between Sraffa and Keynes", en Piero Sraffa's Political Economy, edited by T. Cozzi and R. Marchionatti, Routledge Taylor and Francis Group.

Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación", 1973, F.C.E (On the Principles of Political Economy and Taxation, Cambridge U. Press, 1950, Londres).

Rojo Duque, L.A.: "Keynes, su tiempo y el nuestro", 1984, Alianza Editorial.

Roncaglia, Alessandro (2009): "La riqueza de las ideas", Prensas Universitarias de Zaragoza, (The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought, Cambridge University Press, 2005).

Schumpeter, J.A.: "Historia del Análisis Económico", 1971, edit. Ariel.

Skidelsky, R.: "El regreso de Keynes", 2009, edit. Crítica. (The Return of the Master, 2009).

Togati, T. D.: "Keynes and the Neoclasical Sythesis", ", en Piero Sraffa's Political Economy, edited by T. Cozzi and R. Marchionatti, Routledge Taylor and Francis Group.

Skidelsky, R.: "El regreso de Keynes", 2009, Editorial Crítica.

Vegara, J. M.: "Economía política y modelos multisectoriales", 1979, edit. Tecnos.

Vianello, F.: "La Demanda Efectiva y la Tasa de Ganancia: algunas reflexiones sobre Marx, Kalecki y Sraffa", 2006, revista Circus, UBA, Buenos Aires.