MERCANCÍA-PATRÓN PARA LA PRODUCCIÓN CONJUNTA. PLANIFICACIÓN A PARTIR DE SRAFFA

Antonio Mora Plaza
Economista, Madrid

http://dx.doi.org/10.5209/rev_NOMA.2012.v36.n4.42313

Resumen.- Sraffa elaboró una mercancía-patrón en su obra para la producción simple independiente de los precios. Este artículo trata de completarlo para la producción conjunta basado en una interpretación, pero no única, en *Producción de mercancías por medio de mercancías*.

Making an standard-commodity for the sraffian joint-production

Abstract.- In *Production of commodities by means commodities* was maked by Sraffan an standard-commodity for the single-production with independence of prices. This article try to complete it for the joint-production based in an possible buy not only interpretation of Sraffa´s book.

Keywords.- *Sraffa, standard-commodity, single-production, joint-production*

JEL: B24

La *mercancía-patrón* y la *razón-patrón* son dos de las grandes aportaciones de Sraffa al análisis económico y, en especial, a la teoría del excedente. Con ello alcanzó el economista italiano el sueño de Ricardo: construir una medida del excedente independiente e invariante de los precios. Pero Sraffa se limitó a la producción simple y no pudo hacer lo mismo con el mismo éxito en la producción conjunta. El hecho se debe a que en la producción simple tenemos un bien o servicio (mercancías, *commodities*, en lenguaje de Sraffa) por sector, empresa o proceso, lo cual permite utilizar el teorema de *Perron-Frobenius*. Es verdad que en Sraffa no aparece explícitamente el teorema, pero sí que lo tuvo *in mente* y en las conversaciones e intercambio epistolar con sus amigos matemáticos Ramsey y Besikovitch, y explicó su desarrollo y consecuencias en sus aspectos económicos en los capítulos IV y V de su obra *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Veamos. La mercancía-patrón vendría definido por el sistema de ***n***+**1** ecuaciones:

(1) $$u\, y_1 q_1 = x_{11} q_1 + x_{12} q_2 + \Lambda\ + x_{1n} q_n$$

(…) ……………………………………………..

(…) $$u\, y_n q_n = x_{n1} q_1 + x_{n2} q_2 + \Lambda\ + x_{nn} q_n$$

(2) $$\sum_1^n l_j q_j = 1$$

donde $\boldsymbol{y}_i$ son los $\boldsymbol{n}$ productos finales, $\boldsymbol{x}_{ij}$ los $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ medios de producción, $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, ... , $\boldsymbol{q}_n$, los *multiplicadores*, $\boldsymbol{l}_j$ son los inputs de trabajo y $\boldsymbol{u}$ un coeficiente *modificador del nivel de actividad*. En términos matriciales, la ecuación (1) es:

(3) $$u \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Y de forma abreviada:

(4) $$uYQ = XQ$$

(5) $$LQ = 1$$

De (4) se obtiene:

(6) $$uQ = Y^{-1}XQ$$

lo cual ya permite aplicar Perron-Frobenius para obtener un autovector por la derecha (los $\boldsymbol{n}$ multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$) y un autovalor ($\boldsymbol{u}$) positivo que es el mayor de todos los autovalores (incluso tomados estos en términos absolutos). Pero la limitación de este modelo de mercancía-patrón es que para poder aplicar el teorema de Perron-Frobenius $\boldsymbol{Y}$ ha de ser diagonal para asegurar que la matriz $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}$ es positiva, una de las condiciones[1]. En la producción conjunta, sin embargo, la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}$ no es diagonal para poder cumplir el criterio *esrafiano* de este modelo de producción, según el cual, “*dos de las mercancías son producidas conjuntamente por una sola industria*”[2]. En definitiva, en la producción conjunta (hasta ahora sin diferenciación entre bienes básicos y no básicos) se tienen $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ productos finales $\boldsymbol{Y}$ –al igual que medios de producción $\boldsymbol{X}$– en lugar de los $\boldsymbol{n}$ productos de la producción simple. Pero Sraffa afirma a continuación algo sorprendente cuando señala que ahora “*habría más precios a determinar que procesos y, por tanto, habría más precios a determinar que ecuaciones para determinarlos*”[3]. Esta afirmación se contradice con las ecuaciones que expone en la pág. 70 del mismo capítulo, donde el vector de precios de productos finales –que es el mismo que el de medios de producción–, tiene $\boldsymbol{n}$ elementos. La cosa se complica aún más porque Sraffa parece identificar producción conjunta con producción con diferenciación entre bienes básicos y no básicos, siendo ambos conceptos diferentes. En concreto, *la producción con diferenciación* entre estos bienes es un caso particular de *la producción conjunta* (tal como la entiende Sraffa), pero no se pueden identificar. La producción *con diferenciación* es aquella en que determinados bienes y servicios intervienen en la producción de al menos un

[1] Los elementos de una matriz diagonal son los inversos de los elementos de la diagonal principal, por lo que si los elementos de esta diagonal original son positivos también lo serán sus inversos.
[2] Pág. 67 de *Producción de mercancías por medio de mercancías*, edit. Oikos-Tau.
[3] Pág. 67 de *PMPM.*

proceso (bienes básicos) y otros que nunca entran como medio[4] (no básicos). Esa contradicción señalada la resuelva Sraffa eliminando[5] las ecuaciones donde entran a su vez los bienes no básicos que entran como productos (por definición de bienes no básicos no pueden entrar como medios). Pues bien, vamos a intentar ahora construir una mercancía-patrón para la producción conjunta, cosa que no consiguió Sraffa de manera satisfactoria. En la producción conjunta tenemos el sistema de ecuaciones parecido a (1) tal como:

(7) $$u \times \begin{bmatrix} y_{11} & \Lambda & y_{1n} \\ M & O & M \\ y_{n1} & \Lambda & y_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ M \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \Lambda & x_{1n} \\ M & O & M \\ x_{n1} & \Lambda & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ M \\ q_n \end{bmatrix}$$

y de forma abreviada:

(8) $$uYQ = XQ$$

donde la matriz ***Y*** ahora contiene –o puede contener– ***n***x***n*** elementos. El problema ahora es que no se puede aplicar Perron-Frobenius porque nada garantiza que la inversa de estos productos finales de producción conjunta ***Y*** sea positiva en todos sus elementos[6]. Para poder construir una mercancía-patrón para la producción conjunta vamos a proceder a explicitar las ecuaciones que definen este modelo de producción en su versión más sencilla:

(9) $$PY = wL + (1+g)PX$$

(10) $$PY = (1+g_m)PX$$

donde ***P*** es el vector de precios **1**x***n***, ***w*** la tasa de salarios, ***g*** la tasa de ganancia, ***Y*** la matriz ***n***x***n*** de también ***n***x***n*** elementos de productos finales, ***X*** la matriz ***n***x***n*** de medios de producción y $\boldsymbol{g}_{m}$ la tasa máxima de ganancia que surge como resultado de hacer cero la tasa de salarios en (9). La ecuación (10) puede ser escrita de la forma:

(11) $$\boxed{(1+g_m)^{-1}PY = PX}$$

Supongamos ahora que partimos de una mercancía-patrón tal como:

---

[4] Sraffa fue cambiando de criterio respeto a estos bienes, pero creo que la definición que se da es la correcta.

[5] Epígrafe 59, pág. 76 de *PMPM.*

[6] Abraham-Frois y Berrebi resumen las dificultades de encontrar la mercancía-patrón en la producción conjunta en *Theory of Value, Prices and Accumulation* de la siguiente manera: a) La existencia de un sistema-patrón y de una mercancía-patrón no está garantizada; b) Incluso en el caso de la existencia del sistema-patrón, la unicidad no siempre es posible (is not always certain); c) Cuando el sistema-patrón existe y es único, no es siempre posible establecer una relación lineal entre tasa de ganancia y tasa de salarios en términos de la mercancía-patrón (pág. 80, edit. Cambridge U. Press, 1979, versión inglesa; 1976, versión original francesa).

(12) $$uZQ = XQ$$

donde ***Z*** es ahora una matriz diagonal ***n***x***n***, pero ¡sólo con ***n*** elementos!, es decir, una ecuación susceptible de aplicar el teorema Perron-Frobenius. La cuestión que se plantea es: ¿podremos poner ***Z*** en función de los elementos fijos de las ecuaciones de producción conjunta (9) y (10) y que sea independiente de los precios? Si ello fuera posible podríamos construir la mercancía-patrón con (12). Tomamos ahora la traspuesta de (12) y queda:

(13) $$\boxed{uQ^T Z = Q^T X^T}$$

donde hemos mantenido $Z = Z^T$, dado que la traspuesta de una matriz diagonal (sólo elementos en la diagonal principal) es la matriz original. Si comparamos ahora la ecuación (11) con la (13) y la igualamos miembro a miembro obtenemos:

(14) $$\boxed{(1+g_m)^{-1} PY = uQ^T Z}$$

(15) $$\boxed{PX = Q^T X^T}$$

Pues bien, si hacemos $u = 1/(1+g_m)$, despejamos los precios en (15) al pos-multiplicar dicha ecuación por la inversa de ***X*** y sustituimos estos precios en (14) queda:

(16.1) $$\boxed{Q^T Z = Q^T X^T X^{-1} Y}$$

¡y obtenemos un sistema de ***n*** ecuaciones con **2*n*** incógnitas (***n*** multiplicadores ***q*** y ***n*** productos finales ***z***) independiente de los precios! El otro sistema de ***n*** ecuaciones lo surte (13), con lo cual el sistema tiene una solución. El multiplicador ***u*** se calcula a partir de $u = 1/(1+g_m)$. Además, la tasa máxima de ganancia g_m no es una variable monetaria y no depende de las variables monetarias del sistema, tal como se demuestra en el apéndice. Sustituyendo $Q^T Z$ de (16.1) por su valor en (13) obtenemos la ecuación matricial implícita en Q^T tal como:

(16.2) $$\boxed{Q^T = (1+g_m)^{-1} Q^T X^T X^{-1} Y (X^{-1})^T}$$

que es una ecuación matricial que da origen a ***n*** ecuaciones con ***n*** incógnitas (los ***n*** multiplicadores q_i del vector vertical ***Q***). El sistema tiene una solución. Y dado que ***Z*** es una matriz diagonal, (16) se puede presentar algebraicamente de la manera:

(17) $$\boxed{z_l = \frac{1}{q_l} \times \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_i x_{ji} \hat{x}_{jk} y_{kl}} \quad \text{para } l = 1 \text{ a } n$$

siendo los x_{jk} con sombrero los elementos de la matriz inversa de ***X***. De (13) sale:

(18) $$\boxed{z_l = (1+g_m)\times\frac{1}{q_l}\times\sum_{j=1}^{n} q_j x_{lj}}$$ para $l = 1$ a n

Entre (17) y (18) están implicadas **2*n*** ecuaciones y **2*n*** incógnitas (***n*** q_i y ***n*** z_i). Es imposible llegar a estas conclusiones formales a base de razonamientos económicos o de cualquier otro tipo. No obstante, la resolución[7] de los sistemas de ecuaciones (17) y (18) no garantiza que los multiplicadores q_i y los productos finales z_i calculados (hoy diríamos virtuales) sean positivos. Y ello no sólo porque no se puede aplicar Perron-Frobenius (único garante de que se obtengan ***q*** multiplicadores positivos), sino porque en (16.1) está implicada la matriz inversa de los medios de producción ***X***. Los dos últimos sistemas de ecuaciones tienen soluciones independientemente de los precios, es decir, para cualquier vector de precios, que es de lo que se trataba.

Un camino distinto, aunque más directo, hubiera sido partir directamente de la ecuación de definición de la mercancía-patrón ***uYQ***=***XQ***, donde se ha utilizado la matriz de productos finales ***Y*** a sabiendas de que esta matriz no es diagonal. Puede comprobar el lector que si se hacen exactamente los criterios de igualación de matrices y de sustitución de precios ***P*** tal y como se ha hecho anteriormente, el resultado sería una ecuación matricial implícita como:

(16.3) $$\boxed{Q^T = Q^T X^T X^{-1} Y (Y^{-1})^T}$$

donde tenemos ***n*** ecuaciones y ***n*** incógnitas (los q_i multiplicadores). La diferencia entre la manera de obtener los multiplicadores en (16.2) y en (16.3) es que allí no está presente la matriz de bienes finales ***Y*** y en esta última sí lo está. Pero hay que insistir que eso es pura apariencia porque en (16.2) está la tasa máxima de ganancia g_m, tasa que no es monetaria porque es una medida del excedente, es decir, de ***X*** y de ***Y***. Puede comprobarse que si se establece que la tasa máxima de ganancia cumple la ecuación $Y=(1+g_m)X$, las ecuaciones (16.2) y (16.3) son la misma ecuación. La ventaja de (16.3) es que no es preciso estimar (o encontrar) esa tasa máxima. Pero hay que señalar que hay una diferencia notable entre emplear ***uZQ***=***XQ*** como definición de mercancía-patrón o emplear ***uYQ***=***XQ***, a pesar de que los multiplicadores ***Q*** sean los mismos: que en el primer caso ***Z*** es una matriz diagonal ***n***x***n*** de ***n*** productos finales e ***Y*** es una matriz no diagonal ***n***x***n*** de ***n***x***n*** productos finales, por lo que ambos criterios darán distintas mercancías-patrón, pero igualmente válidas.

Producción conjunta con diferenciación entre bienes

La producción conjunta *esrafiana* se caracteriza porque una misma empresa, sector o proceso (mejor proceso) puede producir más de un producto, lo cual le

[7] Mediante algún algoritmo de aproximación. Por otro lado, la (18) no es una combinación lineal de la (17) puesto que en esta última hay una variable (la **Y**) que no están en la (18).

añade realismo al modelo y deja la producción simple como una mera introducción a una teoría de la producción (conjunta) que debiera ser imperante. Sraffa introduce la diferenciación entre bienes básicos y no básicos que ya hemos definido antes, pero a continuación y casi sin solución de continuidad, habla de eliminar esas últimas ecuaciones, con lo cual no siguió la construcción de una mercancía-patrón para este caso. Nosotros sí lo haremos. La primera consecuencia de ello es que ahora ya no tenemos un solo vector de precios que sirve tanto para los medios de producción como para los productos finales (Sraffa parte, aunque no lo explicite, de una situación de equilibrio[8]), sino que tenemos dos vectores de precios; la segunda es que el vector de precios de productos finales no básicos no tiene por qué tener el mismo tamaño que el de básicos. Seguimos a Sraffa en el criterio de salarios *post-factum* porque eso no hace variar las conclusiones de lo que sigue, aunque la preferencia del autor de este artículo son los salarios *pre-factum*, es decir, aquellos en los que el margen de ganancia incluye todos los costes (también los salariales). No obstante los resultados son los mismos como podría comprobar el lector si partiera de los salarios *pre-factum*. Sin más dilación exponemos el sistema de ecuaciones que definirían el modelo *esrafiano* de producción conjunta con diferenciación entre bienes básicos y no básicos.

(19) $$P_N Y_N + PY = wL + (1+g)PX$$

(20) $$P_N Y_N + PY = (1+g_m)PX$$ cuando ***w***=**0**

(21) $$P_N Y_N + PY = w_m L + PX$$ cuando ***g***=**0**

donde los precios de los bienes no básicos están dados por el vector $\boldsymbol{P}_N$ que van desde **1** a ***m***, y los productos finales por la matriz $\boldsymbol{Y}_N$ de estos bienes de dimensión ***m***x***n***. El resto de las variables son las mismas que en la producción conjunta sin diferenciación y que ya hemos definido anteriormente. La novedad respecto a la producción conjunta sin diferenciación entre bienes básicos y no básicos es que ahora nos vemos obligados a introducir esta ecuación matricial (21), puesto que tenemos nuevas variables (los precios de los bienes no básicos $\boldsymbol{P}_N$). La hipótesis que representa (21) nunca la contempló Sraffa. Ahora procedemos de la misma manera y tenemos la ecuación matricial (20) escrita como:

(22) $$(1+g_m)^{-1} \times [P_N Y_N + PY] = PX$$

Si ahora establecemos el mismo juego de igualdades con (13), es decir con:

(13) $$uQ^T Z = Q^T X^T$$

sale el sistema de **2*n*** ecuaciones:

(23) $$\boxed{(1+g_m)^{-1} \times [P_N Y_N + PY] = uQ^T Z}$$

---

[8] A diferencia de los modelos de equilibrio general de origen *walrasiano* que tratan de encontrar (llegar) a una solución de equilibrio, a ser posible única y estable.

(24) $$\boxed{PX = Q^T X^T}$$

De las ecuaciones (20) y (21) obtenemos los precios $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{w}_m/\boldsymbol{g}_m)\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}$, que sustituidos en la (24) obtenemos:

(25) $$\boxed{Q^T = \frac{w_m}{g_m} \times L\left[X^{-1}\right]^T}$$

Una vez calculados los multiplicadores, los ***n*** $\boldsymbol{z}_{ii}$ de productos finales virtuales de la mercancía-patrón (que es una especie de agregado de bienes básicos y no básicos) se obtienen de (13) y de la igualdad que establecemos[9] de $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)^{-1}=\boldsymbol{u}$. Y resulta sorprendente que, a pesar de la mayor complejidad de la producción conjunta con diferenciación de bienes, el cálculo de los multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$ es mucho más sencillo. Aquí estos multiplicadores *aparentemente* no dependen[10] de los productos finales $\boldsymbol{Y}_N$ e ***Y***, sino tan solo de los inputs de trabajo ***L***, de los medios de producción ***X*** y de las tasas máximas de salarios $\boldsymbol{w}_m$ y de ganancias $\boldsymbol{g}_m$. Pero eso es sólo pura apariencia, porque la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ sí depende del excedente (ver apéndice), donde sí están los productos finales.

Generalizaciones del modelo sin diferenciación

Hasta ahora, para la obtención de la mercancía-patrón en la producción conjunta sin diferenciación, hemos partido de las ecuaciones de definición del sistema de Sraffa, es decir, de (9) y (10), y de tasa de salarios y de ganancia unitarias; además considerábamos, con Sraffa, que los salarios se pagaban *post-factum*. Ahora vamos a levantar estas dos consideraciones. La primera porque es muy restrictiva; la segunda porque se adecua más a la realidad la consideración de que los precios se forman a partir de un margen sobre los costes, pero sobre todos los costes, incluyendo los salariales. Por ello, vamos a partir ahora de las ecuaciones de definición del sistema tal como:

(26) $$PY = \left[LW + PX\right](I + G)$$

(27) $$PY = PX(I + G_m)$$

donde lo que ha variado es que ya no tenemos una tasa de salario ***w*** o de ganancia ***g***, sino una matriz diagonal ***n***x***n*** de ***n*** salarios ***W***, otra también ***n***x***n*** de ***n*** ganancias ***G*** y una tercera $\boldsymbol{G}_m$ de tasas máximas de ganancia, también ***n***x***n*** de ***n*** elementos. Lo que apenas ha variado es la ecuación de construcción de la mercancía-patrón y es tal como:

[9] Al no poder aplicar el teorema Perron-Frobenius, esta igualdad no es un resultado sino una hipótesis de partida.

[10] No se ha utilizado la ecuación (23) precisamente para soslayar en el cálculo de los multiplicadores Q los precios de los bienes no básicos, aunque luego las cantidades de estos bienes YN sí intervendrán en el cálculo de la mercancía-patrón mediante (13).

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(28) $$UZQ = XQ$$

donde ***Z*** sigue siendo una matriz diagonal y ***U*** también. Decíamos *apenas*, porque el cambio es que ya no tenemos un *coeficiente de modificación del nivel de actividad* ***u***, sino que se ha convertido en una matriz diagonal ***U n***x***n***. La razón del cambio se verá a continuación. Si tomamos la traspuesta de (28) queda:

(29) $$\boxed{Q^T ZU = Q^T X^T}$$

La razón de que la matriz virtual de productos finales ***Z*** no aparezca con el signo de la traspuesta es que la traspuesta de una matriz diagonal es igual a la matriz original; lo mismo para coeficiente de modificación del nivel de actividad ***U***. De (27), al igual que en el modelo anterior de tasas de salarios y ganancias únicas, sale:

(30) $$PY(I + G_m)^{-1} = PX$$

Si ahora igualamos el primer miembro de (29) con el primero del (30) y el segundo también de (29) con el segundo de (30), obtenemos el par de ***n*** ecuaciones:

(31) $$\boxed{Q^T ZU = PY(I + G_m)^{-1}}$$

(32) $$\boxed{Q^T X^T = PX}$$

Y si, al igual que en el caso más simple, despejamos los precios en (32) y los sustituimos en (31), el resultado es que:

(33) $$\boxed{Q^T ZU = Q^T X^T X^{-1} Y(I + G_m)^{-1}}$$

Que es una ecuación muy parecida a la ecuación (16) para el caso de salarios y ganancias unitarias ya visto, pero con la diferencia de que ahora no tenemos un coeficiente de modificación del nivel de actividad ***u*** sino una matriz diagonal ***n***x***n*** de ***n*** coeficientes ***U***. Por ello ahora no podemos eliminar estos coeficientes con la matriz inversa de tasas máximas de ganancia $(\mathbf{I}+\mathbf{G}_m)^{-1}$. El problema es que ahora no tenemos **2*n*** variables sino **3*n*** (***n*** multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$, ***n*** productos finales virtuales $\boldsymbol{z}_i$ y ***n*** coeficientes de *modificación del nivel de actividad* $\boldsymbol{u}_i$). Pero también, al igual que antes, tenemos la ecuación matricial (29) de ***n*** ecuaciones:

(29) $$\boxed{Q^T ZU = Q^T X^T}$$

Aún nos faltan ***n*** ecuaciones para que se igualen el número de ecuaciones (**3*n***) con el número de incógnitas o variables. Pues bien, tenemos esa ecuación:

(34) $$\boxed{U = (I + G_m)^{-1}}$$

Y con (29), (33) y (34) ya igualamos el número de ecuaciones que de incógnitas (**3*n***). Otra forma de ver (33) es sustituyendo el primer término de la igualdad $\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{ZU}$ por su valor en (29) y queda de nuevo:

(33.2) $$\boxed{Q^T = Q^T X^T X^{-1} Y (I + G_m)^{-1} (X^{-1})^T}$$

donde tenemos en (33.2) un sistema matricial de variables implícitas ***Q***, es decir, de ***n*** ecuaciones con ***n*** multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$.

Al igual que el caso anterior de tasas unitarias para este modelo económico, si partiéramos de la ecuación ***UYQ***=***XQ*** en lugar de la (28), es decir, si partiéramos de la ecuación de definición de la mercancía-patrón donde está ***Y*** en lugar de la virtual ***Z***, siguiendo los pasos anteriores obtendríamos:

(33.3) $$\boxed{Q^T = Q^T X^T X^{-1} Y (Y^{-1})^T}$$

donde ya hemos comentado para el caso de tasas unitarias que tendríamos ***n*** multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$ en ***n*** ecuaciones. Una curiosidad no casual: si igualamos las condiciones de igualdad de (32.3) y (33.3) obtenemos que una condición suficiente -aunque no necesaria- para tal fin (para obtener los $\boldsymbol{q}_i$ multiplicadores) es que se cumpla la igualdad:

(33.4) $$(I + G_m)^{-1} (X^{-1})^T = (Y^{-1})^T$$

que, tras algunas transformaciones elementales de matrices, queda que:

(33.5) $$\boxed{G_m = X^{-1}(Y - X)}$$

que nos indica que la tasa máxima de ganancia es una medida del excedente. En este caso es igual al excedente pero, en general, la relación sería $\boldsymbol{G}_m = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})$, siendo ***F*** una matriz diagonal de elementos todos positivos que indica la proporcionalidad (en lugar del caso particular de la igualdad). Es, por lo tanto, la tasa máxima de ganancia una variable no monetaria (sólo depende, a lo sumo, de los inputs de trabajo ***L***, de los productos finales ***Y*** y de los medios ***X***). Esta propiedad de la tasa máxima de ganancia se demuestra en el apéndice. En términos geométricos diríamos que (33.2) y (33.3) son dos hiperplanos en ***n*** (los $\boldsymbol{q}_i$ multiplicadores) que se cruzan al menos una vez cuando se cumple que en (33.2) $\boldsymbol{G}_m = \boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})$.

Generalización del modelo con diferenciación de bienes

Para el caso de la producción conjunta con diferenciación de bienes básicos y no básicos tenemos las ecuaciones de definición del sistema:

(35) $$P_N Y_N + PY = [LW + PX](I + G)$$

(36) $$P_N Y_N + PY = PX\,(I + G_m)$$

(37) $$P_N Y_N + PY = LW_m + PX$$

Además, mantenemos la ecuación traspuesta de definición de la mercancía-patrón para una economía con ***n*** tasas de ganancia y ***n*** de salarios:

(38) $$Q^T ZU = Q^T X^T$$

donde ahora no tenemos un *coeficiente de modificación de la escala del sistema* ***u***, sino una matriz diagonal ***U*** con ***n*** términos en dicha diagonal. De la (36) se obtiene:

(39) $$\boxed{(I + G_m)^{-1}[P_N Y_N + PY] = PX}$$

(40) $$\boxed{PX = Q^T X^T}$$

De las ecuaciones (36) y (37) salen los precios $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{W}_m\boldsymbol{G}_m{}^{-1}\boldsymbol{X}^{-1}$. Y, de forma análoga al sistema de tasas únicas ya visto, sustituimos estos precios en la (40) y queda:

(41) $$\boxed{Q^T = LW_m G_m^{-1}(X^{-1})^T}$$

Y en (41) puede comprobarse que si convertimos la matriz $\boldsymbol{G}_m$ de tasas máximas de ganancia en un escalar obtenemos (25). Y (41) merece los mismos comentarios que en el caso anterior. Una vez obtenidos los ***n*** multiplicadores ***Q***, con (38) y haciendo $(\mathbf{I}_d+\boldsymbol{G}_m)^{-1}=\boldsymbol{U}$, se obtienen los ***n*** elementos de ***Z***.

Mercancía-patrón y capital fijo

Así como Sraffa abordó el tema de construir una mercancía-patrón para la producción conjunto, no intentó nada parecido para la producción con capital fijo (sea simple o conjunta). Aquí se va a abordar el problema para la producción con capital fijo dentro de la conjunta, siendo en todo caso la producción de capital fijo en la simple un caso particular. El capital fijo ha de entenderse de la manera habitual, es decir, es el conjunto de medios de producción que no se desgasta o desaparece en el período de producción convencional. Es, en definitiva, un problema de duración. Sraffa entiende, además, que "*la misma máquina, a edades diferentes, debiera ser tratada como otros tantos productos diferentes, cada uno con su propio precio*"[11].

[11] Pág. 93 de *PMPM.*

Exponemos a continuación la ecuación a la que llegó Sraffa para la producción con capital fijo, pero con alguna diferencia que comentamos:

(42) $$PY = (1+g)\left[wL + PX\right] + \frac{g(1+g)^n}{(1+g)^n - 1} \times P_m M$$

donde ***P*** es un vector de precios **1**x***n*** de productos finales[12] ***Y***, que es una matriz ***n***x***n*** de ***n***x***n*** productos finales (es decir, estamos en la producción conjunta y no en la simple), ***w*** y ***g*** son las tasas de salarios y ganancias respectivamente, ***X*** los medios, $\boldsymbol{P}_m$ es un vector **1**x***n*** de precios de los productos de capital fijo y ***M*** es una matriz cuadrada ***n***x***n*** de estos productos de capital fijo. Las diferencias de los expuesto con Sraffa son la siguientes: 1) La tasa de ganancia abarca tanto los salarios (masa salarial diríamos hoy) ***wL*** como los medios de producción que se desgastan en ese período convencional (un año para Sraffa) del que se ha hablado. Es decir, se trabaja con salarios *pre-factum* y no *post-factum*, como hace Sraffa, siendo estos últimos aquellos que se adelantan sobre los costes y, por tanto, los costes salariales no se verían incrementados por la tasa de ganancia a la hora de calcular los precios. Sraffa justifica sus razones "*como un salario avanzado desde el capital*"[13] para excluir la tasa de ganancia sobre los salarios, pero hoy día eso resulta inadmisible. En cualquier caso esta consideración no va a afectar a la posible construcción de la mercancía-patrón; 2) La fórmula de la anualización que precede al vector resultante $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{M}$ es el modelo y conclusión al que llega Sraffa en su discusión sobre la producción con capital fijo, y aquí la aceptamos sin otra discusión por no ser objeto de este artículo la bondad u oportunidad del proceder de Sraffa en esta materia. Luego se generalizará también a ***n*** salarios y ***n*** tasas de ganancia. Como se verá luego en la discusión, la posible construcción de una mercancía-patrón para este tipo de producción no se verá afectada por estas generalizaciones, pero todo ello da carácter realista a esa mercancía virtual (en lenguaje actual) independiente de los precios, lo cual permite acercarse al núcleo duro de la economía, al estudio del excedente invariante a los precios.

Si ahora hacemos, como es habitual en Sraffa, cero la tasa de salarios obtenemos:

(43) $$PY = (1+g_m)PX + \frac{g_m(1+g_m)^n}{(1+g_m)^n - 1} \times P_m M$$

donde ha desaparecido la tasa de salario ***w*** y, por esa razón, la tasa de ganancia ***g*** pasa a ser la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$. Que Sraffa empleara la misma tasa de ganancia para calcular los costes que para calcular la anualización (el quebrado que precede a $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{M}$) es más que discutible, pero

[12] En este caso la dimensión de los precios se ha cambiado de **1**x**m** a **1**x**n** porque se partirá de unoa productos finales únicos representados por Z, lo cual exige que las matrices $\mathbf{Y}_N$ e **Y** tengan las mismas dimensiones.

[13] Pág. 26 de *PMPM*.

aquí no se discute y se acepta el criterio *esrafiano*. Existirá mercancía-patrón si logramos calcular una matriz diagonal ***Z*** que dependa sólo de los productos finales ***Y***, de los medios de producción ***X*** y ***M*** según la ecuación:

(44) $$uZQ = (cX + dM)Q$$

de tal forma que, tanto la matriz diagonal ***n***x***n*** ***Z*** de ***n*** productos finales virtuales, el vector vertical de multiplicadores ***Q*** ***n***x**1** y el coeficiente ***u*** *no* dependan de las variables monetarias del sistema (precios y tasas de salario y de ganancia), sino tan solo de las variables físicas (***L***,***Y***,***X***,***M***). La mercancía patrón estaría formada por ***uZQ*** productos finales virtuales y (***X***+***M***)***Q*** medios de producción virtuales (anuales, ***X***; fijos, ***M***). Multiplicando la ecuación (43) por $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}})^{-1}$ sale:

(45) $$\boxed{(1+g_m)^{-1}PY = PX + \frac{g_m(1+g_m)^{n-1}}{(1+g_m)^n - 1} \times P_m M}$$

Y tomando la traspuesta de (44) queda:

(46) $$\boxed{uQ^T Z = cQ^T X^T + dQ^T M^T}$$

donde se ha escrito ***Z*** en (46) en lugar de $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}$ dado que la traspuesta de una matriz diagonal es la misma matriz. Si ahora comparamos (45) con (46) podemos establecer las siguientes igualdades[14]:

(47) $$\boxed{(1+g_m)^{-1}PY = uQ^T Z}$$

(48) $$\boxed{PX = cQ^T X^T}$$

(49) $$\boxed{(1+g_m)^{-1} = u}$$

Pues bien, del conjunto de ecuaciones (46), (47), (48) y (49) obtenemos la siguiente:

(50) $$\boxed{Q^T = \frac{(1+g_m)}{c} \times Q^T \left[cX^T + dM^T\right] Y^{-1} X (X^{-1})^T}$$

¡Y (50) es un sistema de ***n*** ecuaciones con ***n*** incógnitas que son los ***n*** multiplicadores del vector **Q**, que no dependen ni de los precios (***P***, $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$) ni de las tasas de salario y ganancia! Y esta ecuación implícita en ***Q*** puede decirse que ***Q*** es función de ***Y***, ***X***, ***M*** y $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$, es decir, que:

---

[14] También se puede obtener la igualdad $\boxed{\frac{g_m(1+g_m)^{n-1}}{(1+g_m)^n - 1} \times P_m M = dQ^T M^T}$, pero ésta sería una combinación lineal de (45), (47), (48) y de (46) si queremos utilizar la (46) también. Es decir, hay que renunciar a una de las cuatros igualdades. Aquí se renuncia a esta que figura en este pie de página.

(51) $$Q^T = f(c, d, g_m Y, X, M)$$

Remplazada (51) en (46), nos da los ***n*** productos finales virtuales ***Z*** tal como:

(52)

$$z_{jj} = (1+g_m) \times \frac{1}{q_j} \times \left[c \sum_{i=1}^{n} q_i x_{ji} + d \sum q_i m_{ji} \right] \quad \forall j = 1 \; a \; n \quad y \quad con \; z_{ij} = 0 \; si \; j <> i$$

Calculados los ***n*** elementos del vector ***Q*** y luego ***Z*** ya tenemos la mercancía-patrón mediante $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)^{-1}$ ***ZQ*** y (***cX*** + ***dM***)***Q***. Como cabía esperar los bienes no básicos $\mathbf{Y}_N$ no influyen en el cálculo de los multiplicadores ***Q***, y además, en este caso particular de definición de mercancía-patrón, tampoco influyen en la construcción de esta mercancía virtual.

Al igual que ocurría en la producción conjunta, la mercancía-patrón obtenida por el procedimiento anterior no garantiza que todos los multiplicadores del vector ***Q*** sean positivos por la existencia de la matriz inversa de ***X*** que aparece (50). Esto ya lo había previsto Sraffa para la producción conjunta[15] y ello puede ser aplicado en la producción con capital fijo que se ha analizado. La razón de ello es que ahora no tenemos un solo producto final (***Y*** no es diagonal) por el conjunto de procesos de cada mercancía (por cada fila de medios ***X*** y ***M***), sino más de uno. Y ello tampoco garantiza que todos los productos finales virtuales ***Z*** (ecuación (52)) sean positivos, aunque no sea fácil que ocurra al ser cada $\boldsymbol{z}_j$ la suma del producto de ***n*** multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$ por la suma de los medios de producción $\boldsymbol{x}_{ji}$ y $\boldsymbol{m}_{ji}$. Ante esta posibilidad para la producción conjunta, decía Sraffa que habría que interpretar las posibles mercancías virtuales negativas de la ecuación (52) como pasivos con "*la obligación de entregar sin pago ciertas cantidades de determinadas mercancías*"[16]. Pero, en todo caso, ello no valdría como justificación para los productos finales virtuales $\boldsymbol{z}_j$ porque no se puede producir una cantidad negativa, salvo que entendamos que determinados productos como la contaminación o las armas han de tener tal consideración. En definitiva tenía razón Sraffa al considerar la posibilidad de la existencia de multiplicadores negativos en la construcción de la mercancía-patrón en la producción conjunta, pero no en cuanto a los posibles infinitos multiplicadores. La ecuación (50) demuestra que es posible una solución única, aunque esta solución hay que encontrarla de forma algorítmica.

Mercancía-patrón con capital fijo y diferenciación de bienes

La ecuación de definición del sistema de Sraffa de producción conjunta con capital fijo y con diferenciación entre bienes básicos y no básicos vendría dada por la ecuación:

[15] Pág. 72 de *PMPM*.
[16] Pág. 73 de *PMPM*.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(53) $$P_N Y_N + PY = (1+g)\left[wL + PX\right] + \frac{g(1+g)^n}{(1+g)^n - 1} \times P_m M$$

donde las nuevas variables que no han aparecido en los epígrafes anteriores son los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}$ (**1**x***n***) de los bienes no básicos y los productos finales respectivos $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$ (***n***x***n***). Si, como es habitual, hacemos cero la tasa de salarios ***w*** queda:

(54) $$P_N Y_N + PY = (1+g_m)PX + \frac{g_m(1+g_m)^n}{(1+g_m)^n - 1} \times P_m M$$

Existirá mercancía patrón si logramos construir una matriz $\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Q}$ (en este caso no diagonal) ***n***x***n***, un vector de multiplicadores ***Q*** **1**x***n*** (o ***n***x**1**) y cuatro coeficientes ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** que sean independientes de precios, salarios y ganancias y que, además, cumplan con la ecuación matricial:

(55) $$\left[aY_N + bY\right]Q = \left[cX + dM\right]Q$$

Los cambios aquí introducidos respecto a la producción conjunta sin diferenciación son notables. Ahora no podemos mantener la *diagonalidad* de la matriz ***Z*** y la solución de depende de unos coeficientes de ponderación ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** de los que no imponemos condiciones previas. Lo que sí podemos establecer (o no) es que ***a***+***b***=**1** y que ***c***+***d***=**1**. Si tomamos la traspuesta de (55):

(56) $$\boxed{aQ^T Y_N^T + bQ^T Y = cQ^T X^T + dQ^T M^T}$$

Y ahora establecemos las ecuaciones surgidas de igualar término a término[17] las ecuaciones (54) y (56):

(57) $$\boxed{P_N Y_N = aQ^T Y_N^T}$$

(58) $$\boxed{PY = bQ^T Y^T}$$

(59) $$\boxed{(1+g_m)PX = cQ^T X^T}$$

(60) $$\boxed{\frac{g_m(1+g_m)^n}{(1+g_m)^n - 1} \times P_m M = dQ^T M^T}$$

Y si ahora despejamos los precios ***P*** en (58) y los reemplazamos en (59) queda la ecuación matricial implícita en $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$:

[17] Debemos renunciar a una de las 5 ecuaciones que van de la (56) a la (60) porque una de ellas, por construcción, es combinación lineal de las otras 4. Dejamos fuera aquí la (60).

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(61) $$Q^T = \frac{(1+g_m)b}{c} \times Q^T Y^T Y^{-1} X (X^{-1})^T$$

Y en (61) tenemos un sistema de ***n*** ecuaciones con ***n*** multiplicadores del vector ***Q***. Una vez hallados los multiplicadores[18] y teniendo en cuenta (60), hallamos[19] ***Z***=(***a****Y*N+***bY***)***Q***. Al igual que en la producción conjunta con capital fijo del epígrafe anterior, no se puede garantizar que todos los multiplicadores sean positivos por la existencia en (61) de las inversas de las matrices ***X*** e ***Y***. En (61) no tenemos una sola mercancía-patrón, sino infinitas soluciones mercancías-patrón según demos valores a los coeficientes ***b*** y ***c***. En el caso de que ambos coeficientes tomaran el valor más alto posible de acuerdo con la restricción impuesta anteriormente (***a***+***b***=**1** y ***c***+***d***=**1)**, entonces ***a*** y ***d*** valdrían cero, con lo que los productos finales no básicos $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$ y los bienes de capital fijo ***M*** no jugarían ningún papel en la construcción de la mercancía-patrón y estaríamos en este caso en la producción conjunta sin diferenciación y sin capital fijo.

Nuevo criterio de construcción de la mercancía-patrón

Aunque parezca paradójico, la imposibilidad de aplicar Perron-Frobenius en la producción conjunta no ha cerrado el camino de construir una mercancía-patrón a partir del criterio *esrafiano* para la producción simple, sino que ha abierto otras posibilidades. Ya la hemos visto para la producción conjunta con diferenciación entre bienes básicos y no básicos, pero ahora la vamos a aplicar para el caso más simple de producción conjunta.

I - Partimos de dos de las mismas ecuaciones de definición del sistema ya vistas:

(62) $$PY = wL + (1+g)PX$$

(63) $$PY = (1+g_m)PX$$

Pero ahora le añadimos una tercera ecuación resultante de hacer cero la tasa de ganancia:

(64) $$PY = w_m L + PX$$

La novedad en este segundo método de construcción es que el vector de precios no va a salir de la ecuación $\boldsymbol{PX}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$, sino del resultado de igualar (63) y (64), que da el vector de precios:

(65) $$P = \frac{w_m}{g_m} \times LX^{-1}$$

18 Mediante algún algoritmo dado que (61) es un sistema implícito en las incógnitas $\boldsymbol{q}_{\mathrm{i}}$.

19 Al ser ecuaciones matriciales implícitas tanto (61) como (55), las soluciones han proceder de algún algoritmo de aproximación.

Partimos de la ecuación de definición de la mercancía-patrón *esrafiana* una vez tomada la traspuesta:

(66) $$uQ^T Z = Q^T X^T$$

Y por igualación entre los primeros términos de (63) y (66) y de los dos segundos términos respectivos obtenemos las dos ecuaciones matriciales:

(67) $$\boxed{(1+g_m)^{-1} PY = uQ^T Z}$$

(68) $$\boxed{PX = Q^T X^T}$$

Lo que cambia ahora es que no vamos a tomar los precios ***P*** de la ecuación matricial (68) –como hacíamos antes–, sino que los precios los sacamos de (65). Por lo tanto -y a diferencia del criterio anterior- nos olvidamos de la ecuación (68) y hallamos la resultante del conjunto de ecuaciones (63), (65), (66) y (67) tal como:

(69) $$\boxed{Q^T = \frac{w_m}{g_m(1+g_m)} \times LX^{-1}Y(X^{-1})^T}$$

Si comparamos la ecuación anterior con la implícita en ***Q*** obtenida bajo el primer criterio:

(16.1) $$Q^T = (1+g_m)^{-1} Q^T X^T X^{-1} Y (X^{-1})^T$$

vemos que la gran diferencia es que en (16) no entra los inputs de trabajo ***L*** y sí en la (69). Al entrar la variable de los inputs de trabajo nos ha permitido obtener una ecuación matricial explícita de los multiplicadores ***Q***. Ello supone una solución distinta, aunque las hipótesis de partida sean las mismas.

II - Si generalizamos las ecuaciones de definición del sistema (62), (63) y (64) y lo cambiamos a salarios *pre-factum*, es decir, si partimos de las ecuaciones:

(70) $$PY = \left[LW + PX\right](I+G)$$

(71) $$PY = PX(I+G_m)$$

(72) $$PY = LW_m + PX$$

(73) $$Q^T ZU = Q^T X^T$$

Y ***U*** ya no es una escalar, sino una matriz diagonal de *coeficientes de modificación del nivel de actividad*. Procediendo de forma análoga de cómo lo hemos hecho en el caso anterior, se obtendría:

(74) $$\boxed{Q^T = LW_m G_m^{-1} X^{-1} Y \left[I + G_m \right]^{-1} (X^{-1})^T}$$

La solución con el primer criterio daba en (33.2):

(33.2) $$\boxed{Q^T = Q^T X^T X^{-1} Y (I + G_m)^{-1} (X^{-1})^T}$$

donde -y de forma análoga al caso anterior- en (74) están los inputs de trabajo ***L*** y no lo están en (33.2)[20]. Calculados los multiplicadores, bien en (74), bien con (33.2), los productos finales virtuales ***Z*** se calculan conjuntamente con (73) y con la ecuación matricial $\boldsymbol{U}=(\mathbf{I}+\boldsymbol{G}_m)^{-1}$.

Sin en lugar de la mercancía virtual que representa la matriz virtual ***Z*** que hemos supuesto en la ecuación de definición de la mercancía-patrón (73), hubiéramos sustituido los valores originales de productos finales ***Y***, es decir, si hubiéramos empleado como definición de mercancía-patrón la ecuación ***zYQ***=***XQ***, el cálculo de los multiplicadores daría:

(74.2) $$\boxed{Q^T = LW_m G_m^{-1} X^{-1} Y (Y^{-1})^T}$$

III - Con este nuevo criterio como bandera -tomar los precios a partir de las ecuaciones de definición del sistema económico-, pasemos ahora a la producción conjunta con diferenciación entre bienes básicos y no básicos y con capital fijo. Pero para darle generalidad al tema, vamos a partir, no de una sola tasa de salarios y otra de ganancias, sino de ***n*** tasas de ambas mediante las matrices diagonales ***n***x***n*** $\boldsymbol{W}_m$ y $\boldsymbol{G}_m$ respectivamente. Las ecuaciones de definición del sistema serían:

(75) $$P_N Y_N + PY = \left[LW + PX \right](I + G) + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times P_m M$$

(76) $$P_N Y_N + PY = PX(I + G_m) + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times P_m M$$

(77) $$P_N Y_N + PY = \left[LW_m + PX \right] + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times P_m M$$

---

[20] Si igualamos las ecuaciones (74) y la (33.2) y eliminamos términos comunes (multiplicando ambos términos de la ecuación matricial por los inversos en ambos lados de la igualdad) queda: $\boxed{LW_m G_m^{-1} = Q^T T^T}$ y despejando $\mathbf{Q}^T$ sale: $\boxed{Q^T = LW_m G_m^{-1} (X^{-1})^T}$, que es la misma expresión que la (41), que correspondía a un modelo con diferenciación entre bienes básicos y no básicos. Es decir, los hiperplanos en **Q** que representan (74) y (33.2) (producción conjunta <u>sin</u> diferenciación) comparten un espacio común, que es otro hiperplano de las mismas dimensiones (**n**) tal que es solución de la construcción de la mercancía-patrón para un sistema <u>con</u> diferenciación entre bienes básicos y no básicos. Lo cual indica que los bienes no básicos no han jugado ningún papel en el cálculo de los multiplicadores, aunque estos sí influyen en el de la construcción de la mercancía-patrón mediante (73).

Otra variación importante y decisiva para obtener una mercancía-patrón con un nuevo criterio es que el tipo de interés (o de ganancia) de la anualización ***r*** sea distinto del tipo aplicado al margen sobre los costes ***g***. Los salarios son *pre-factum* y no *post-factum* o *esrafianos*, por lo que el margen sobre los costes para calcular los precios en (75) abarca todos los costes, incluidos los salariales. Y es necesaria esta diferenciación porque de lo contrario, cuando hacemos las ganancias cero en (77) para obtener la tasa máxima de salarios, el término que *pre-multiplica* a $\mathbf{P}_m\boldsymbol{M}$ (anualización) quedaría indeterminado (cero divido entre cero), con lo cual no se podría avanzar. Además no son sólo razones matemáticas, sino también económicas. No parece lógico que sea la misma tasa ***g*** la que se carga a los costes para determinar los precios que la que calcula la anualización ***r*** del capital fijo[21]. Con el criterio que vimos anteriormente no teníamos la ecuación (77) por la razón anterior. Ello impedía determinar los precios a partir de las ecuaciones de definición del sistema. Sraffa expone sus motivos[22] o consecuencias, pero nosotros no seguimos a Sraffa en este punto. De las ecuaciones matriciales (76) y (77) sale:

(78) $$P = LW_m G_m^{-1} X^{-1}$$

La definición de la mercancía-patrón de la que partimos es la misma que en el caso visto:

(55) $$\left[aY_N + bY\right]Q = \left[cX + dM\right]Q$$

(79) $$\boxed{aQ^T Y_N^T + bQ^T Y^T = cQ^T X^T + dQ^T M^T}$$

Pues bien, establecemos ahora el mismo juego de igualdades entre las ecuaciones (79) y (76) y a partir de la traspuesta de (55) queda:

(80) $$\boxed{P_N Y_N = aQ^T Y_N^T}$$

(81) $$\boxed{PY = bQ^T Y^T}$$

(82) $$\boxed{PX(I + G_m) = cQ^T X^T}$$

(83) $$\boxed{\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times P_m M = dQ^T M^T}$$

El cambio de procedimiento para la búsqueda de una nueva mercancía-patrón viene dado porque ahora no se eliminan los precios entre (81) y (82), sino que se sustituyen primero en (81) y luego en (82) los precios surgidos de (78), es decir, de las ecuaciones de definición del sistema. Indicado el procedimiento, damos el resultado tras manipulaciones elementales de matrices:

---

[21] Sraffa lo justifica mediante una especie de *teoría de amortizaciones aceleradas*. Al menos es una consecuencia por mantener la misma tasa para el cálculo de los precios y para el cálculo de las amortizaciones del capital fijo (epígrafe 82, pág. 101 de *PMPM*).

[22] Pág. 101 de *PMPM*.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(84) $$Q^T = \frac{1}{b} \times LW_m G_m^{-1} X^{-1} Y (Y^{-1})^T$$

(85) $$Q^T = \frac{1}{c} \times LW_m G_m^{-1} (I + G_m)(X^{-1})^T$$

Son soluciones diferentes, además de que para cada valor de ***b*** y ***c*** se obtienen infinitas soluciones. Comprobamos en este punto de la mercancía-patrón en la producción conjunta con diferenciación que, no sólo existen infinitas soluciones de mercancía-patrón al tener una incógnita más que ecuaciones por mor de los coeficientes (indispensables), sino que hemos dado tres criterios diferentes de obtención de esta mercancía virtual que Sraffa intentó extender a la producción conjunta, aunque no a la conjunta con capital fijo. Ya Sraffa habla en la producción conjunta de tomar el mínimo de la razón-patrón ***R*** porque, con ello, obtenía infinitos resultados en función de los valores de la tasa de salarios que el sistema fuera tomando. Vemos que el problema, al menos formalmente, era más complejo de lo que el propio Sraffa había imaginado, incluso reducido a la producción conjunta sin diferenciación entre bienes básicos y no básicos; mucho más cuando se diferenciación entre ambos, y más aún cuando se le añade el capital fijo.

El punto de vista de Sraffa (una interpretación)

Sraffa nos dice en el epígrafe[23] 63 de su obra que "*si consideramos el problema desde el punto de vista del sistema de productos simples, encontraremos que mientras un patrón plenamente positivo se conforma al sentido común, su superioridad se debe –por lo menos en igual medida– a que es el que, al mismo tiempo, corresponde al mínimo valor posible de **R**. Y veremos que la posesión de esta última propiedad es suficiente, por sí misma, para hacer que el producto neto patrón que la posee sea elegible para ser adoptado como unidad de salarios y ganancias*". Sraffa da a continuación un razonamiento económico de porqué debiera escogerse el valor más bajo de la razón-patrón para tomar como unidad de medida "*el producto neto patrón*". Sraffa, de alguna manera, nos está indicando claramente el sistema de ecuaciones que van a definir, según él, la mercancía-patrón para la producción conjunta. Además, por el sistema de ecuaciones que expone y por sus propias palabras en el comienzo del epígrafe 62, esta producción conjunta lo es sin diferenciación entre productos básicos y no básicos. La dificultad con la que se encuentra –seguro que asesorado por sus amigos matemáticos en este punto-es que no puede aplicar el teorema de Perron-Frobenius al no ser la matriz de productos finales ***Y*** una matriz diagonal. Una de las consecuencias de este hecho es que ahora la razón-patrón no puede ser deducida de las variables físicas del sistema (inputs de trabajo, medios de producción y productos finales) por medio del teorema aludido, sino que entiende Sraffa que es una variable del sistema, por lo que el número de variables ha aumentado en una unidad, a pesar de que el número de ecuaciones pertinentes -que ahora veremos- siguen siendo las mismas. Otro aspecto discutible en este capítulo de

[23] Pág. 79 de *PMPM*.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

la obra de Sraffa es conceptual, porque el gran economista italiano sigue llamando *razón-patrón* a lo que en la producción conjunta es sólo *tasa máxima de ganancia*. Este equívoco se debe a que es sólo en la producción simple donde se igualan sus valores –razón-patrón y tasa máxima-, aunque sean conceptos diferentes. En efecto, la razón-patrón es una propiedad que se deriva de la construcción de la mercancía-patrón y gracias a la posibilidad de aplicar el teorema, mientras que la tasa máxima de ganancia surge de hacer cero la tasa de salarios en la ecuación de definición del sistema que el propio Sraffa señala. En este epígrafe aceptamos la denominación de Sraffa, pero queda señalada esta distinción al menos conceptual. Sin más dilación pasamos a formalizar las ideas de Sraffa en este capítulo –y epígrafe concreto- mediante el siguiente sistema de ecuaciones que comentamos:

(86) $$PY = wL + (1+r)PX$$

(87) $$PY = (1+R)PX$$

(88) $$PYI - PXI = 1$$

(89) $$LI = 1$$

(90) $$uYQ = XQ$$

(91) $$u = (1+R)^{-1}$$

La ecuación (86) es la de definición de un sistema *esrafiano* con salarios unitarios *post-factum*, pero con la gran diferencia respecto a la producción simple de que ***Y*** es una matriz no diagonal ***n***x***n*** de ***n***x***n*** elementos. En la (87) hemos aceptado llamar *razón-patrón* ***R*** lo que en realidad es *tasa máxima de ganancia* porque la ecuación surge de hacer cero la tasa de salario ***w*** en (86). Las ecuaciones (88) y (89) son pertinentes porque de esa forma, con estas dos ecuaciones junto con (86) y (87), surge la relación entre tasa de salario ***w***, tasa de ganancia ***r*** y razón-patrón ***R*** (con la salvedad anterior) que hizo famosa Sraffa para la producción:

(92) $$\boxed{r = (1-w)R}$$

Además las ecuaciones (88) y (89) son los numerarios[24] que emplea Sraffa para llegar a (92). De (87) sale $(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{PY}=\boldsymbol{PX}$ y de la (90) a su vez se obtiene $\boldsymbol{uQ}^{T}\boldsymbol{Y}^{T}=\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{X}^{T}$. De estas dos ecuaciones, igualando término a término, queda:

(93) $$\boxed{(1+R)^{-1}PY = uQ^{T}X^{T}}$$

(94) $$\boxed{PX = Q^{T}X^{T}}$$

De esta última ecuación obtenemos los precios tal como:

[24] Tomar como numerario una expresión matemática o una variable en un sistema de ecuaciones es dividir dichas ecuaciones entre los numerarios.

(95) $$P = Q^T X^T X^{-1}$$

Vayamos ahora a la (86), de la que surge los precios ***P*** de forma implícita tal como:

(96) $$P = wLY^{-1}\left[I - (1+r)A\right]^{-1}$$

donde $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$. Ya estamos casi al final. Entre (95) y (96) se elimina el vector de precios ***P*** y se despeja el vector horizontal de multiplicadores ***Q*** y tenemos:

(97) $$Q^T = wLY^{-1}\left[I - (1+r)A\right]^{-1} X\,(X^{-1})^T$$

Sraffa debió tener a la vista una ecuación como (97), aunque su genio podría haberle llevado a las conclusiones de la pág. 79 de su obra. Esta ecuación pude ser escrita de forma más clarificadora como:

(98)
$$\boxed{Q^T = wLY^{-1}\left[I + (1+r)A + (1+r)^2 A^2 + \Lambda\ + (1+r)^{n-1} A^{n-1}\right] X\,(X^{-1})^T}$$

Y por último, si en (98) sustituimos la tasa de ganancia ***r*** por su valor en (92) y obtenemos:

(99) $$\boxed{Q^T = wLY^{-1}\left[I + (1+(1-w)RA) + \Lambda\ + (1+(1-w)RA)^{n-1}\right] X\,(X^{-1})^T}$$

Y en (99) tenemos las variables que maneja Sraffa para el cálculo de los ***n*** multiplicadores ***Q***, que son la tasa de salarios ***w*** y la razón patrón ***R***, junto con los inputs de trabajo ***L***, los medios ***X*** y los productos finales ***Y*** ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$). No serían unos multiplicadores aceptables puesto que dependen de una variable monetaria como es la tasa de salarios ***w***, pero es la que defiende Sraffa. A cada nivel de salarios surge un vector de multiplicadores. Si los salarios alcanzaran todo el excedente, es decir, si ***w*=1** según (92), saldrían unos multiplicadores como:

(100) $$Q^T(w=1) = LY^{-1} X\,(X^{-1})^T$$

Y para unos salarios cero valen cero los multiplicadores. Vemos que con el método de Sraffa los salarios no pueden ser cero, razón por la cual habla de que "*La reconciliación se efectúa mediante un salario que sea una cantidad positiva de una mercancía compuesta cuyo valor de cambio sea cero*"[25]. Creo que (99) y (100) podrán ayudar a la lectura del epígrafe 63 de la obra de Sraffa y seguir su razonamiento económico, aunque, en mi opinión, la solución de Sraffa no resulta satisfactoria. Otra cosa es si interpretamos el problema como

[25] Pág. 79 de *PMPM.*

uno de programación lineal que ya comentamos en otra parte de este artículo. Acaba Sraffa el epígrafe con una afirmación que esta vez sí se deduce de las ecuaciones implícitas de su sistema. Habla de la posibilidad de unos precios tendentes al infinito "*en términos del patrón elegido*", aunque añade que tal cosa "*puede ser evitada si adoptamos como unidad de medida el producto neto patrón que corresponde al más bajo de los valores de R*"[26]. No es admisible que esa posibilidad de precios al infinito dependa del patrón de medida y no es correcta tal afirmación, pero el resto sí lo es. Veamos. De las ecuaciones (86) y (87) se obtiene que los precios valen también:

$$\boxed{P = \frac{w}{R - r} \times LX^{-1}} \tag{101}$$

donde si ***r*** se acercara a ***R*** porque ***w*** se acercara a cero, podría ocurrir que los precios se acercan al infinito, y más si, como hace Sraffa, considera que esta tasa de ganancia es en realidad otra razón-patrón surgida como consecuencia de adoptar "*como unidad el producto-patrón correspondiente a otro valor*". En este caso el denominador de (101) estaría constituido por la diferencia de dos razones-patrón distintas a causa de sistema de medición distinto con la misma tasa de salarios ***w***. Sin embargo tal problema se elimina si mantenemos el mismo criterio de medición del excedente, es decir, la misma razón-patrón, sean cuales sean salarios y ganancias. En efecto, de (101) y de (92) se deduce que:

$$P = \frac{1}{R} \times LX^{-1} \tag{102}$$

donde no es posible que los precios vayan al infinito mientras salarios y ganancias se mantengan en los límites de la razón-patrón, es decir, siempre que cumplan la ecuación (92).

Generalización de los coeficientes de actividad

Una posible crítica de los visto hasta ahora en la producción conjunta con capital fijo y/o con diferenciación entre bienes básicos y no básicos es la de que hemos presentado cada matriz de bienes (por ejemplo, básicos y no básicos) con un sólo coeficiente, con un escalar en definitiva, para cada matriz. También se ha hecho para la diferenciación de los medios entre los circulantes que desaparecen en un año (período convencional que además utiliza Sraffa) y los de capital fijo. Por ello vamos ahora a subsanar tal defecto o limitación a base de matrices –en lugar de escalares- que van a *pre-multiplicar* a las matrices que representan productos o medios. Iremos al caso más complicado porque los demás serán casos particulares. Suponemos una economía *esrafiana* con diferenciación formal (y no sólo conceptual) entre bienes básicos y no básicos y, también, con capital fijo. La ecuación de definición del sistema sería:

---

[26] Pág. 80 de *PMPM.*

(103) $$P_N Y_N + PY = \left[LW + PX\right](I+G) + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times P_m M$$

(104) $$P_N Y_N + PY = PX(I+G_m) + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times P_m M$$

Donde ya hemos comentado que la (104) vendría derivada de la (103) al hacer cero la matriz de tasa de salarios. El cambio con lo visto hasta ahora viene con la ecuación de definición de la mercancía-patrón:

(105) $$AY_N Q + BYQ = CXQ + DMQ$$

donde ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** son ahora matrices diagonales ***n***x***n*** de ***n*** elementos (aunque también podrían ser no diagonales de ***n***x***n***). Al utilizar matrices que multiplican bienes heterogéneos, podemos ahora sumar los resultados si suponemos que estos multiplicadores no son simples números aritméticos, sino que tienen una dimensión que permiten homogeneizar bienes y servicios heterogéneos. En cualquier caso estos coeficientes múltiples de nivel de actividad no pueden ser calculados puesto que no se hacen supuestos especiales sobre ellos, por lo que de entrada hay que admitir que existirán infinitas mercancías-patrón. Hechas estas consideraciones, pasamos a establecer los criterios de la construcción de la mercancía-patrón como se ha hecho a lo largo de este trabajo mediante igualación entre sumandos entre las ecuaciones (104) y (105). Pero primero tomamos la traspuesta de (105):

(106) $$\boxed{Q^T Y_N A + Q^T Y^T B = Q^T X^T C + Q^T M^T D}$$ [27]

Y los criterios de igualación serían:

(107) $$\boxed{PX(I+G_m) = Q^T X^T C}$$

(108) $$\boxed{PY = Q^T Y^T B}$$

Y si eliminamos los precios ***P*** entre las ecuaciones (107) y (108) obtenemos:

(109) $$\boxed{Q^T = Q^T Y^T B Y^{-1} X (I+G_m) C^{-1} (X^{-1})^T}$$

Y (109) nos da ***n*** ecuaciones con ***n*** incógnitas ***Q***, dando por hecho que los elementos de ***B*** y ***C*** son datos de partida. Y calculado el vector de multiplicadores $\boldsymbol{Q}^T$, calculamos los componentes de la mercancía-patrón a partir de (106).

[27] Si las matrices **A**,**B**,**C**,**D** fueran no diagonales, es decir, con **n**x**n** elementos, en la ecuación (106) figurarían las traspuestas de estas matrices, pero ello nada cambiaría en las conclusiones.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

Una alternativa a (109) es aumentar en una ecuación –tal y como hemos hechos en un epígrafe anterior y a lo largo del artículo- haciendo cero la tasa de ganancia en la ecuación de definición del sistema (103). El resultado es:

(110) $$P_N Y_N + PY = [LW_m + PX] + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times P_m M$$

Y de entre las ecuaciones (104) y (110) obtenemos los precios ***P***:

(111) $$P = LW_m G_m^{-1} X^{-1}$$

Ahora sustituimos los precios obtenidos de (111) en (107):

(112) $$Q^T = LW_m G_m^{-1}(I + G_m)C^{-1}(X^{-1})^T$$

Si (111) hubiera sido sustituido en (108) en lugar del (107) hubiéramos obtenido otros multiplicadores q_i de:

(113) $$Q^T = LW_m G_m^{-1} X^{-1} YB^{-1}(Y^{-1})^T$$

En epígrafes anteriores donde estaban implicados coeficientes de actividad escalares, no se podían evitar multiplicadores q_i negativos debido a la presencia de matrices inversas de medios de producción ***X*** y de productos finales ***Y***. Sin embargo, ahora sí podemos subsanar tal dificultad con tal de elegir las matrices de actividad ***B*** y ***C*** convenientemente. Como en casos anteriores, las soluciones de ***Q*** de los hiperplanos que representan (109), (112) y (113) están relacionados. En concreto, el hiperplano que representa (109) comparte un espacio común con el de (113) que es justamente el (112), cosa que se puede comprobar sustituyendo la ecuación matricial (113) en (109).

Cálculo de la mercancía-patrón con programación lineal I

Con el criterio del cálculo de la razón-patrón en la producción conjunta[28], dejó Sraffa, sin ser consciente de ello -¿o quizá sí?- abierto el camino al cálculo tanto de la razón-patrón y la mercancía-patrón por medio de la técnica de la programación lineal. Veamos una economía *esrafiana* definida por el conjunto de ecuaciones:

(114) $$PY = (1+g)[wL + PX]$$

(115) $$PY = (1+g_m)PX$$

(116) $$PY = w_m L + PX$$

[28] Epígrafe 64 de *PMPM.*

Se ha considerado el modelo con salarios *pre-factum*, que no es el criterio de Sraffa, pero los resultados son análogos. Además, al estar en la producción conjunta, ***Y*** es no diagonal. De la (115) sale:

(117) $$(1+g_m)^{-1}PY = PX$$

La mercancía-patrón se podrá construir si podemos encontrar un mecanismo (o algoritmo) que nos calcule $\boldsymbol{g}_m$, ***M*** y ***Q*** en la ecuación:

(118) $$uYQ = MXQ$$

donde ***u*** es una escalar, ***Q*** es un vector vertical de multiplicadores y ***M*** una matriz diagonal. Si transponemos (118) queda:

(119) $$uQ^T Y^T = Q^T X^T M$$

Establecemos ahora las igualdades que siguen a partir de las ecuaciones (117) y (119):

(120) $$\boxed{u = (1+g_m)^{-1}}$$

(121) $$\boxed{(1+g_m)^{-1}PY = uQ^T Y^T}$$

(122) $$\boxed{PX = Q^T X^T M}$$

Ahora, eliminando los precios ***P*** entre (121) y (122) y teniendo en cuenta (120), nos da una ecuación implícita en término de los multiplicadores ***Q*** tal como:

(123) $$\boxed{Q^T X^T M X^{-1} = Q^T Y^T Y^{-1}}$$

Y el problema de encontrar la mercancía-patrón se presenta como el de encontrar los ***n*-1** valores $\boldsymbol{m}_{ii}$ de la matriz diagonal ***M***, los ***n*** multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$ del vector ***Q*** tales que cumplan los siguiente requisitos:

a) que se cumpla las ***n*** ecuaciones de (123)
b) que se cumpla para los ***n*** coeficientes $\boldsymbol{q}_i$>**0**
c) que los ***n*** coeficientes de ***M*** cumplan que $\boldsymbol{m}_{ij}$>0 si ***i*=*j*** y $\boldsymbol{m}_{ij}$=**0** si ***i***<>***j***

d) que la suma de los ***n*** coeficientes valga $\sum m_{ij} = 1$ con la condición anterior

Se puede proceder de forma alternativa. De las ecuaciones (115) y (116) se obtienen los precios del modelo *esrafiano*:

(124) $$P = \frac{w_m}{g_m} \times LX^{-1}$$

que sustituida en (122) se obtienen los multiplicadores del vector (transpuesto) ***Q***:

(125) $$\boxed{Q^T = \frac{w_m}{g_m} LM^{-1}(X^{-1})^T}$$

que, eliminada la trasposición dejamos preparado los multiplicadores para el cálculo de la mercancía-patrón, es decir:

(126) $$\boxed{Q = \frac{w_m}{g_m} X^{-1}(M^{-1})^T L^T}$$

Dos consideraciones antes de llegar a la mercancía-patrón: a $(M^{-1})^T$ le llamaremos la matriz ***S***. Además, si tomamos a colación el numerario esrafiano ***PY*I**-***PX*I**=**1**, de esto y de la ecuación (116) sale:

(127) $$w_m = 1/LI$$

Con todo lo anterior obtenemos la mercancía-patrón de los medios:

(128) $$\boxed{mercancía{-}patrón\ X = XQ = \frac{1}{g_m LI} \times SL^T}$$

Y para los productos finales:

(129) $$\boxed{mercancía{-}patrón\ Y = YQ = \frac{1}{g_m LI} \times YX^{-1}SL^T}$$

Las condiciones de la programación son análogas a las del caso anterior con dos novedades:

e) Ahora tomamos como numerarios ***PY*I**-***PX*I**=**1** y ***LQ***=**1**
f) Lo que dijimos antes para ***M*** lo decimos ahora para ***S***

Y de nuevo se trata de encontrar los ***n*** multiplicadores q_i, los ***n*-1** coeficientes s_i de ***S*** y la tasas máxima de ganancia g_m.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

Cálculo de la mercancía-patrón con programación lineal II

Este epígrafe es una nueva vuelta de turca al previo que tiene como fin calcular la mercancía-patrón para la producción conjunta. El método se aleja tanto de Schefold (1977) como de Abraham-Frois/Berrebi (1976), aunque dice el proverbio que todos los caminos conducen a Roma[29]. El problema de la producción conjunta es que ya no podemos asegurar que todos los multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$ sean mayores que cero porque en la ecuación de definición de la mercancía-patrón $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{XQ}$ no podemos utilizar Perron-Frobenius dado que no es posible asegurar a su vez que $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}$ sea no negativa (semi-positiva, propiamente, porque al menos algún elemento de la matriz ha de ser positivo). Sin embargo no todo está perdido por ello. El propio Sraffa abre un camino –análogo al que aquí seguimos- al conjeturar –Sraffa no demuestra nada- que el valor mínimo de las razones-patrón posible ha de corresponder con una mercancía-patrón exenta de valores negativos[30]. Y aun cuando el propio Sraffa no tuviera intención de ello, la búsqueda del mínimo nos da una pista para abordar el problema de encontrar la mercancía-patrón de la producción conjunta: la programación lineal. Veamos una nueva manera de encontrar una mercancía-patrón a partir de las variables físicas del modelo de Sraffa: medios de producción $\boldsymbol{X}$, productos finales $\boldsymbol{Y}$ e inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$. Partimos de una economía dibujada borrosamente por las matrices de productos y medios tales como:

Y = productos finales

80	45	55	180
135	200	115	450
120	40	320	480

X = medios de producción

90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

L = inputs de trabajo			Ll
0,300	0,200	0,500	1,000

Estamos en la producción conjunta dado que la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}$ no es diagonal, sino que tiene elementos positivos en todas sus casillas (con tal de que tenga un elemento positivo además de los de la diagonal principal ya

[29] Kurz y Salvadori en cambio sí plantean algo análogo en *Theory of Production* (pág. 267, 1995) cuando dicen, a partir de una tabla input-output para la producción conjunta con máquinas ("jointly utilizad machines"), que: "but in order to analyze when this can be done (se refiere a los casos en que puede reorganizarse las máquinas (device) de una planta) we need a complete model wich incluyes not only processes in wich the plant is not dismantled and reassembled, but all processes". En el modelo que aquí se presenta es todo un proceso el que se desmatela y se rehace.

[30] Ver epígrafe 64 de *PMPM*.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

estamos en la producción conjunta). Vamos a calcular como siempre los multiplicadores ***Q*** a través de la ecuación de definición de la mercancía-patrón:

(130) $$uYQ = XQ$$

siendo ***u*** *el coeficiente de escala* de Sraffa, que es el autovalor de la ecuación $\boldsymbol{uQ}=(\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X})\boldsymbol{Q}$ siempre que la matriz resultante $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}$ sea no negativa (mejor semi-positiva). Si calculamos en nuestro ejemplo esta matriz nos da:

	$Y^{-1}X$		$Y^{-1}XI$	$Y^{-1}XQ$
1,468	0,237	0,300	2,006	1,991
-0,196	0,265	-0,320	-0,251	-0,618
-0,339	0,347	0,552	0,560	0,395

Y nos encontramos con la sorpresa desagradable de que algunos elementos de la matriz son negativos, por lo que no podemos aplicar Perron-Frobenius, es decir, no podemos calcular ni el autovalor ***u*** ni el vector de multiplicadores ***Q***. Si hubiéramos estado en la producción simple todos los elementos de la matriz $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}$ hubieran sido positivos porque ***Y*** sería una matriz diagonal y su inversa estaría formada por los inversos de los elementos de la matriz diagonal colocados también en la diagonal principal de la nueva matriz. Pues bien, la solución que se propone en este epígrafe parte de una ecuación tal como:

(131) $$uSYQ = XQ$$

donde ***S*** es una matriz ***n***x***n*** de *coeficientes de actividad* que va a permitir recolocar los elementos de ***Y*** entre las diferentes columnas (procesos) -aunque no entre las diferentes filas (bienes y servicios)- de tal manera que se cumplan tres condiciones:

(132) $$\boxed{uQ = Y^{-1}S^{-1}XQ > 0}$$

(133) $$\boxed{SYQ = YQ}$$

(134) $$\boxed{SYI = YI}$$

La condición reflejada en (132) se deriva de que ***uQ*** ha de ser positivo porque ***u*** lo *tenemos* que igualar a $(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}})^{-1}$ dado que en la producción conjunta no tenemos autovalor al no poder aplicar Perron-Frobenius. Además el vector ***Q*** de multiplicadores queremos que sea positivo, aun cuando tampoco lo podamos calcular con el teorema. La (134) se justifica porque queremos que la suma de los productos finales por filas (por bienes y servicios) sean la misma con coeficientes de ponderación ***S***. Suponemos que partimos de una economía con excedente, por lo que $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ es positivo y que hemos obtenido (o podemos obtener como luego veremos) los multiplicadores ***Q*** todos positivos mediante algún procedimiento. Dicho de otra manera, en esta etapa de construcción de la mercancía-patrón para la producción conjunta tanto $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ como ***Q*** son datos. El problema está en cómo calcular la matriz ***S*** de ponderaciones tal que cumpla con (132) y (133). Para ello recurrimos a la programación lineal y planteamos el siguiente programa:

- datos iniciales: ***L***, ***Q***, ***Y***, ***X***
- objetivo: ***SYQ***=***YQ***
- variables: la matriz ***S*** de actividad ***n***x***n***
- restricciones:

1) $\boldsymbol{uQ} = \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{XQ}>0$ (***n*** restricciones)
2) $\boldsymbol{LQ} = \mathbf{1}$ (**1** restricción)
3) $\boldsymbol{SYI} = \boldsymbol{YI}$ (***n*** restricciones)
4) $\boldsymbol{SYQ} = (\mathbf{1}+\boldsymbol{E}_x)\boldsymbol{XQ}$ (***n***-**1** restricciones)

con $\boldsymbol{E}_{x1} = \boldsymbol{E}_{x2}$ = ----------- = $\boldsymbol{E}_{xn}$

La resolución del problema en una hoja de cálculo Excel nos ha dado la matriz ***S*** de *actividades* tal como:

S = actividades

3,084	-0,463	-0,348
-3,160	1,702	0,527
1,576	-0,350	0,737

Y su inversa que necesitamos para (132) es:

S^{-1}

-22,03	5,11	3,84
-24,97	6,55	4,17
107,06	-23,77	-16,86

El resultado de todo ello es:

YQ	=	SYQ
162,04	=	162,04
311,61	=	311,61
556,58	=	556,58

Y también que:

Y			YI
80,0	45,0	55,0	180,0
135,0	200,0	115,0	450,0
120,0	40,0	320,0	480,0

SY			SYI
142,5	32,3	5,2	180,0
40,2	219,2	190,6	450,0
167,3	30,4	282,3	480,0

			XQ				SYQ	SYQ/XQ
180,0	75,0	28,0	283,0	285,0	48,5	3,6	337,1	1,191
240,0	187,5	28,0	455,5	80,4	328,9	133,4	542,6	1,191
120,0	225,0	140,0	485,0	334,5	45,6	197,6	577,8	1,191

¡con lo que podemos partir de la ecuación ***uSYQ***=***XQ*** en lugar de la inicial ***uYQ***=***XQ*** a sabiendas de que son iguales desde una matriz ***S*** de actividades calculada convenientemente a partir de unos inputs de trabajo ***L***, unos medios de producción ***X***, unos productos finales ***Y***, una tasa máxima de ganancia g_m y unos multiplicadores ***Q*** dados! Es evidente que cualquier modificación del valor de estos elementos harían variar los valores de ***S***, pero la igualdad ***YQ***=***SYQ*** se mantendría, con la ventaja de que ahora se cumple que $Y^{-1}S^{-1}XQ$ es un vector estrictamente positivo y podemos calcular la mercancía-patrón con ***SYQ*** y ***XQ***. En el cuadro último, con las dos matrices, vemos cómo se ha reasignado la matriz original ***Y*** mediante ***S*** en ***SY*** con la condición de que sus sumas por filas (es decir, suma por bienes y servicios de todos los procesos) sean iguales para ambas (***YI***=***SYI***). Así, por ejemplo, en la fila uno había tres procesos que daban como productos finales bienes y servicios 80;45;55, mientras que ahora, para el mismo bien o servicio anterior (supongamos que el sector uno es trigo, ejemplo tan caro a Ricardo), se obtienen 142,5;32,3;5,2. Es decir, se ha producido una reasignación entre sectores, pero el producto final no ha cambiado: 180. Puede comprobarse reasignaciones también en las dos restantes filas de bienes y servicios tal como se ve a continuación, tanto en términos absolutos (matriz de la izquierda) como en términos relativos (la de la derecha):

	SY-Y		SYI-YI		(SY-Y)/Y	
62,5	-12,7	-49,8	0,0	78%	-28%	-91%
-94,8	19,2	75,6	0,0	-70%	10%	66%
47,3	-9,6	-37,7	0,0	39%	-24%	-12%

En una hipotética planificación de la economía bajo esto supuestos, estos cambios tan brutales podrían paliarse tanto como se quisieran imponiendo restricciones en términos relativos a estos cambios entre procesos (entre columnas). Un ejemplo sería el sector energético, donde el producto final sería medido en kw/hora. Allí podría intercambiarse entre sub-sectores procedentes de la energía (petróleo, carbón, hidroeléctrico, solar, eólico, biomasa, etc.) También entre empresas. Aunque el producto final sea el mismo (***YI***=***SYI***), la gran ventaja es que esta reasignación de recursos no afectaría a las variables monetarias, ni produciría una redistribución de la renta (del excedente hablando con propiedad) porque estas variaciones se han hecho precisamente manteniendo las proporciones entre medios y productos (***SYQ***/***XQ***) para todos los bienes y servicios, que es lo característico de un modelo de origen *esrafiano*. En cualquier caso podría cambiarse la función objetivo y maximizar el empleo (***LQ***) o el excedente (***YQ-XQ***), manteniendo la restricción de la igualdad entre productos y medios (mercancía-patrón, ***SYQ***/***XQ***). Completamos ahora la información con los datos del vector de multiplicadores ***Q*** del que partíamos:

Q
1,073
0,070
1,328

Dos comentarios finales. En primer lugar vamos a por el recuento de variables y restricciones, porque, en contra de lo habitual, aquí el número de variables utilizadas es mayor que las restricciones, es decir, ***n***x***n*** variables de la matriz ***S*** y, en cambio, **3*n*** restricciones. El resultado es que existen infinitas matrices ***S*** que satisfacen las condiciones. El segundo comentario tiene que ver con el hecho de que se ha partido de un vector de multiplicadores ***Q***. Ello ha sido a los efectos didácticos, porque este vector ha de calcularse simultáneamente con el vector de ponderaciones ***S***.

Una duda que podría plantearse es si siempre es posible encontrar un ***S*** que permita que, pos-multiplicada su inversa por la inversa de ***Y*** ($\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}$), nos diera un vector de productos finales ($\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{XQ}$) no negativo y una mercancía-patrón ***SYQ*** también positivo e igual a ***YQ***. La contestación es que siempre es posible. Partiendo de una matriz ***S*** diagonal (o también no diagonal) construida de tal forma que la suma por columnas sea la unidad (es decir, que cada elemento de cada fila se forme como el cociente del elemento original y la suma de toda la columna), tenemos una matriz de ponderaciones en la que cada elemento es menor que uno (o igual a uno y el resto cero). Por ejemplo, una $\boldsymbol{S}^{-1}$ matriz en la que una columna elegida al azar estuviera formada por los valores **0**,**1**;**0**,**7**;**0**,**2**. Su suma valdría **1**. Si la fila a pos-multiplicar la columna de la matriz inversa de ***Y*** fuera **0**,**04**;**-0**,**05**;**0**,**07**, el resultado sería un valor negativo del elemento (fila=1, columna=1) de la matriz $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}$. En efecto, el resultado daría la suma de productos:

$$0{,}1x0{,}04+0{,}7x(-0{,}05)+0{,}2x0{,}07 = \mathbf{-}0{,}017<0$$

que es una valor negativo que tratamos de evitar. Ahora, tras una reasignación de las ponderaciones tal como **0**,**7**;**0**,**1**;**0**,**2**, el resultado es que:

$$0{,}7x0{,}04+0{,}1x(-0{,}05)+0{,}2x0{,}07 = 0{,}037>0$$

Y dado que las ponderaciones son arbitrarias (y dadas sólo por el resultado de las restricciones de la programación lineal y la variable objetivo), siempre habrá unas ponderaciones cuya suma de productos con la fila correspondiente de la matriz inversa ***Y*** dé siempre positivo (con tal de algún elemento de la fila de esta matriz sea positivo).

Ahora, de forma general, podemos establecer un programa de programación lineal para calcular simultáneamente la matriz ***S*** (en este caso, diagonal) de *actividades* que ya hemos visto y el vector ***Q*** de multiplicadores. Partimos de la ecuación de definición de un sistema de producción conjunta, pero sin hacer explícitos los elementos de capital fijo (puede entenderse que están subsumidos en la producción del circulante con tal de que se entienda que cada producto de capital fijo no amortizado es un bien final con un precio asignado -o de mercado si lo hubiera- que se incorpora anualmente al ciclo productivo hasta su desaparición al final de ***t*** años). La ecuación de definición del sistema sería:

(135) $$PY = (1+g)\left[wL + PX\right]$$

(136) $$PY = (1+g_m)PX$$

(137) $$LI = 1$$

Ahora la mercancía-patrón se construye a partir del sistema:

(138) $$uSYQ = XQ$$

De (136) sale $(\mathbf{1}+g_m)^{-1}PY=PX$ y de (138) $uQ^TY^TS^T=Q^TX^T$, y ahora igualando como es habitual:

(139) $$\boxed{u = (1+g_m)^{-1}}$$

(140) $$\boxed{(1+g_m)^{-1}PY = uQ^TY^TS^T}$$

(141) $$\boxed{PX = Q^TX^T}$$

Y de las tres ecuaciones anteriores sale:

(142) $$\boxed{Q^TY^TS^TY^{-1}X = Q^TX^T}$$

El problema de calcular la mercancía-patrón se presenta como un problema de programación lineal de la siguiente manera:

- función objetivo: $LQ=\mathbf{1}$
- variables por determinar: ***n*** multiplicadores de ***Q*** y ***n*** coeficientes de ponderación ***S***
- restricciones:

1) $Q^TY^TS^TY^{-1}X=Q^TX^T$
2) $SYI=YI$
3) $Q>0$
4) $uQ=Y^{-1}S^{-1}XQ>0$
5) $SYQ=(\mathbf{I}+E_x)XQ$

$E_{x1} = E_{x2} =$ ----------- $= E_{xn}$

6) $SYQ=YQ$
7) $I_hSI_v=n$, siendo I_h el vector horizontal de unos e I_v el vector vertical de unos también.

siendo E_x la matriz diagonal de excedentes. En total **6*n*** restricciones (de (5) hay ***n*-1** independientes).

Cálculo de la mercancía-patrón con programación lineal III

El cálculo de la mercancía-patrón que inventa Sraffa se basa en construir una relación constante para todos los bienes y servicios entre el total de productos finales y el total de medios de producción. Del texto de *Producción de mercancías por medio de mercancías* se desprende que esos multiplicadores han de ser formalmente un vector que ha de pos-multiplicar tanto a medios como a productos para dar otro vector donde se cumpla el criterio aludido. Y así se ha entendido por los autores que han escudriñado en las propiedades matemáticas de esta obra (Schefold, Kurz, Pasinetti). Sin embargo, que fuera un vector de ***n*** elementos tenía su justificación porque se partía de una matriz de productos finales de también ***n*** elementos (sólo en la diagonal principal). Seguir empleando sólo un vector para la producción conjunta parece pedir demasiado a ese vector de multiplicadores. Parece más apropiado partir, no de un vector de multiplicadores, sino de toda una matriz ***n***x***n*** de ***n***x***n*** elementos por lo que luego veremos. Partimos de un sistema definido por las ecuaciones:

(143) $$PY = (1+g)\left[wL + PX\right]$$

(144) $$PY = (1+g_m)PX$$

(145) $$LI_v = 1$$

(146) $$uYQ_{nxn} = XQ_{nxn}$$

donde $\mathbf{I}_v$ es el vector vertical de unos. La dificultad que surge como es habitual es que al pre-multiplicar (146) por la inversa de ***Y*** -y dado que esta matriz no es diagonal- podría ocurrir que el producto $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}$ no tuviera todos sus elementos positivos, lo cual no garantizaría que los precios en (143) fueran todos positivos. La ecuación resultante sería:

(147) $$uQ = Y^{-1}XQ$$

Si llamamos ***Z*** a la matriz producto $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}$ quedaría la matriz

(148) $$\begin{bmatrix} z_{11} & \Lambda & z_{in} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ z_{n1} & \Lambda & z_{nn} \end{bmatrix}$$

donde algunos $\boldsymbol{z}_{ij}$ serían o podrían ser negativos. Sea entonces ***Q*** una matriz de multiplicadores tal como:

(149) $$\begin{bmatrix} q_{11} & \Lambda & q_{in} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ q_{n1} & \Lambda & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

tal que la suma por columnas valiera siempre **1**. Es decir, que se cumpliera que:

(150) $$\sum_{j=1}^{n} q_{jk} = 1$$ para todo ***k*** = **1** a **n**

Si se elige adecuadamente estos $\boldsymbol{q}_{jk}$ multiplicadores podríamos hacer casi con seguridad que el producto:

(151) $$\begin{bmatrix} z_{11} & \Lambda & z_{in} \\ M & O & M \\ z_{n1} & \Lambda & z_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{11} & \Lambda & q_{in} \\ M & O & M \\ q_{n1} & \Lambda & q_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$$

es decir, fuera estrictamente mayor que cero. No es absolutamente seguro porque podría ocurrir que, si la mayor parte de los elementos de ***Z*** fueran negativos (para empezar todos los elementos de una final de ***Z***), al pos-multiplicar estos sumandos negativos por el vector sería factible que algún elemento del vector columna resultante aún fuera negativo. El elemento genérico de (151) sería:

(152) $$\begin{bmatrix} q_{11} & \Lambda & q_{in} \\ M & O & M \\ q_{n1} & \Lambda & q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_{11}}{\sum_{k=1}^{n} c_{k1}} & \Lambda & \dfrac{c_{in}}{\sum_{k=1}^{n} c_{kn}} \\ M & O & M \\ \dfrac{c_{n1}}{\sum_{k=1}^{n} c_{k1}} & \Lambda & \dfrac{c_{nn}}{\sum_{k=1}^{n} c_{kn}} \end{bmatrix}$$

El término genérico del producto (151) sería:

(153) (i) ……. $$z_{ij} \times \frac{c_{jk}}{\sum_{j=1}^{n} c_{jk}} + \Lambda\ \Lambda + z_{ij} \times \frac{c_{jk}}{\sum_{j=1}^{n} c_{jk}}$$ para ***k*** = **1** a ***n***

De (153) se deduce que si al menos uno de los $\boldsymbol{z}_{ij}$ fuera positivo –aunque el resto fueran negativos– siempre podría recolocarse y definirse cuantitativamente cada uno de los $c_{jk} \Big/ \sum_{j=1}^{n} c_{jk}$ de tal manera que la suma fuera positiva. Pero estos coeficientes de ponderación participan como ponderaciones para el resto de las filas ***i***, por lo que una colocación determinada de los elementos ***z*** negativos en la matriz ***Z*** pudiera hacer imposible que el vector resultante (151) no fuera estrictamente positivo. Ello haría imposible calcular unos multiplicadores ***QI*** todos positivos y, con ello, construir la mercancía-patrón para la producción conjunta. En el epígrafe anterior hemos visto, en cambio, que sí era posible construir la mercancía-patrón si diferenciábamos la matriz de ponderaciones -que llamamos ***S***- del vector de multiplicadores ***Q***. Y ello es así porque, aun cuando –como aquí ocurre– el elemento *ik-ésimo* de la matriz resultante $\boldsymbol{Y}_{ij}\boldsymbol{S}_{jk}$ fuera negativo, nos quedaría elegir un ¡multiplicador negativo! en ***Q*** tal que el elemento a su vez resultante de $\boldsymbol{Y}_{ij}\boldsymbol{S}_{jk}\boldsymbol{Q}_{kl}$ fuera positivo. Aquí sólo tenemos $\boldsymbol{Z}_{ij}\boldsymbol{Q}_{kj}$, por lo que todo puede ocurrir. Sraffa nos dice que siempre es posible construir esa mercancía para la producción conjunta si adaptáramos "el producto neto patrón que corresponda al menor de los valores de ***R***"[31]. Con programación lineal se puede plantear así:

- función objetivo: $\boldsymbol{LSQ}=\mathbf{1}$
- variables a determinar: ***Q*** (matriz ***n***x***n*** con ***n***x(***n*-1**) elementos linealmente independientes)

- restricciones: 1) $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{XQ}>\mathbf{0}$ (***n*** restricciones)
  2) $\boldsymbol{Y}\mathbf{I_v}=\boldsymbol{YS}\mathbf{I_v}$ (***n*** restricciones)
  3) $\boldsymbol{YSQ}\mathbf{I_v}=(\mathbf{I}+\boldsymbol{E}_x)\boldsymbol{XQ}_\mathbf{I}$ (***n*-1** restricciones)
  4) $\mathbf{I_h}\boldsymbol{Q}=\mathbf{I_h}$, (***n*** restricciones)

siendo $\mathbf{I_h}$ el vector horizontal de unos e $\mathbf{I_v}$ el vertical de unos también.
  5) $\boldsymbol{Q}\mathrm{I}_\mathbf{v}>\mathbf{0}$ (***n*** restricciones)

Cálculo de la mercancía-patrón con programación lineal IV

Damos ahora un modelo general de cálculo de los multiplicadores con programación lineal. La economía, en este caso, vendría definido por la ecuación:

(154)

$$P_{N(1xm)}Y_{N(mxn)}+P_{1xn}Y_{nxn}=\left[L_{1xn}W_{nxn}+P_{1xn}X_{nxn}\right](I+G_{nxn})+P_{M(1xv)}M_{vxn}$$

(155) $$LI=1$$

$\boldsymbol{P}_\mathrm{N}$ son los precios de los bienes no básicos (los que no entran nunca como medios); $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N(mxn)}}$ es la matriz de estos bienes que no tiene por qué ser cuadrada (es decir, ***m***<>***n***); ***P*** y ***Y*** son los bienes que ahora consideramos básicos; $\boldsymbol{W}_\mathrm{nxn}$ y $\boldsymbol{G}_\mathrm{nxn}$ son matrices cuadradas y sobre las que podemos elegir que sean sólo diagonales (***n*** elementos en la diagonal principal) o no, es decir, con ***n***x***n*** elementos; $\boldsymbol{P}_{\mathrm{M(1xv)}}$ son los precios de bienes de capital fijo que ahora introducimos y que corresponden a una matriz ***v***x***n*** de tales bienes, es decir, que tampoco es cuadrada; ***L*I**=**1** representa el numerario habitual en Sraffa, donde ***L*** es el vector horizontal **1**x***n*** de inputs de trabajo. Hemos eliminado el escalar $\boldsymbol{r}(\mathbf{1}+\mathbf{r})^s/((\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^s\mathbf{-1})$ que *pre-multiplica* a los precios $\boldsymbol{P}_\mathrm{M}$ de estos bienes y servicios porque los suponemos subsumidos en la matriz $\boldsymbol{M}_\mathrm{vxn}$ de acuerdo con la ecuación $\boxed{\boldsymbol{M}_\mathrm{vxn}=\boldsymbol{S}_\mathrm{vxn}\boldsymbol{T}_\mathrm{nxn}}$, donde $\boldsymbol{S}_\mathrm{vxn}$ es la matriz:

[31] Epígrafe 64 de PMPM.

(156)
$$S_{vxn}=\begin{bmatrix}\dfrac{r_1(1+r_1)^{s_1}}{(1+r_1)^{s_1}-1} & \Lambda & \dfrac{r_1(1+r_1)^{s_n}}{(1+r_1)^{s_n}-1}\\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M}\\ \dfrac{r_v(1+r_v)^{s_1}}{(1+r_v)^{s_1}-1} & \Lambda & \dfrac{r_v(1+r_v)^{s_n}}{(1+r_v)^{s_n}-1}\end{bmatrix}$$

y donde el elemento genérico $\boldsymbol{s}_{ij}$ de $\boldsymbol{S}_{vxn}$ nos da el número de años del valor de la carga financiera de las máquinas de edad ***i*** de cada sector ***j***. $\boldsymbol{T}_{nxn}$ sería el número de máquinas correspondiente a los bienes y servicios ***j*** producidos en cada sector de la economía ***k***. No se hace aquí más comentarios porque esto correspondería a una generalización del modelo sobre el capítulo del capital fijo del libro de Sraffa y no es esa la intención. Sólo se trata de partir de un modelo lo más general posible. Vamos a mantener la matriz de salarios, pero no la de ganancias porque necesitamos un escalar para esta variable monetaria, por lo que calcularemos una tasa de ganancia única a partir de la ecuación:

(157)
$$[LW+PX](I+G)=(1+g)[LW+PX]$$

Se trata de una *media* para la tasa de ganancia, pero una media aritmética surgida de la ecuación (157) y no de cualquier otra manera. Sustituida (157) en (154) y haciendo cero la matriz de tasa de salarios ***W***, queda:

(158)
$$P_N Y_N + PY = (1+g_m)[LW+PX]+P_M M$$

donde ahora $\boldsymbol{g}_m$ representa la tasa máxima de ganancia. Ahora la pre-multiplicamos por la inversa de ($\boldsymbol{1}+\boldsymbol{g}_m$) y dejamos preparada la ecuación para lo que viene:

(159)
$$\boxed{(1+g_m)^{-1}[P_N Y_N + PY]=[LW+PX]+(1+g_m)^{-1}P_M M}$$

Vamos con la construcción de la mercancía-patrón a partir de una caracterización de la economía como la que representa (159). Damos directamente la ecuación y luego la justificamos:

(160)
$$u[A_{nxm}Y_{N(mxn)}+Y_{nxn}B_{nxn}]Q_{nxn}I_{nx1}=[X_{nxn}C_{nxn}+D_{nxv}M_{vxn}]Q_{nxn}I_{nx1}$$

Aquí ***u*** es el coeficiente de actividad o escala que representa el modelo de Sraffa para la producción simple. ***A*** y ***B*** son matrices no cuadradas de ***n***x***m*** y ***v***x***n*** elementos respectivamente que van permitir homogeneizar las variables físicas $\boldsymbol{Y}_N$, ***Y***, ***X*** y ***M*** con el fin de construir la mercancía-patrón. Las matrices ***B*** y ***C*** son cuadradas de ***n***x***n*** elementos y cuyos elementos tienen la propiedad de que su suma por filas vale **1**. Se trata con ello de construir una media ponderada por filas de los productos finales básicos ***YB*** y otra para ***XC***. Con ello podremos re-distribuir las columnas de ***Y*** y ***X*** de tal manera que, con los mismos medios y productos finales (es decir, con la suma por columnas) de partida, lleguemos a estos mismos valores al final, pero redistribuidos entre procesos (columnas) que permitan construir la anhelada mercancía-patrón (es decir, que la proporción entre productos finales y medios después de la re-distribución sea igual para todos los bienes y servicios (para todas las filas). Por último, dejamos los multiplicadores como una matriz ***Q*** (en lugar de directamente un vector) para tener la posibilidad de trabajar con ***n***x***n*** multiplicadores en lugar de tan sólo ***n***. No obstante, el criterio de la mercancía-patrón se mantiene puesto que va a operar sobre las cantidades primitivas ($\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$, ***Y***, ***X*** y ***M***) pos-multiplicados por el vector columna de unos **I**. La traspuesta de esta ecuación[32] sería:

(161) $$\boxed{u\left[Y_N^T A^T + B^T Y^T\right](QI)^T = \left[C^T X^T + M^T D^T\right](QI)^T}$$

Ahora establecemos el sistema de igualdades de (161) con (159):

(162) $$\boxed{(1+g_m)^{-1} = u}$$

(163) $$\boxed{P_N Y_N = (QI)^T B^T Y^T}$$

(164) $$\boxed{PX = (QI)^T C^T X^T}$$

Y de estas tres últimas ecuaciones obtenemos la ecuación implícita en ***QI*** tal como:

(165) $$\boxed{(QI)^T B^T Y^T Y^{-1} X = (QI)^T C^T X^T}$$

Hallado ***QI*** de (165), la mercancía-patrón viene dada por:

(166) $$\boxed{Y_N(m\text{–}patrón) = AY_N QI}$$

(167) $$\boxed{Y(m\text{–}patrón) = YBQI}$$

(168) $$\boxed{X(m\text{–}patrón) = XCQI}$$

(169) $$\boxed{M(m\text{–}patrón) = DMQI}$$

Es de notar que con este método de cálculo de la mercancía-patrón -no necesariamente único-, los bienes no básicos $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{N}}$ y lo bienes de capital fijo ***M*** no juegan ningún papel aunque, una vez calculados los multiplicadores ***Q***, estos sí influyen en la construcción de esta mercancía virtual que queremos obtener. Además, hay que suponer que el nuevo numerario es ***LQI*=1**. Con programación lineal el cálculo de ***QI*** y de la mercancía-patrón (el conjunto de las ecuaciones que van de la (166) a la (169)) quedaría así:

[32] Si las matrices **B y C** son *sólo* diagonales, se cumple que $\mathbf{B}=\mathbf{B}^T$ y $\mathbf{C}=\mathbf{C}^T$.

1) datos: ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***L***, ***Y***, ***X***
2) función objetivo: ***LSQ*I=1**
3) variables a determinar: ***n*** multiplicadores ***Q*I**
4) restricciones:
3.1) $(\mathbf{QI})^T \mathbf{B}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{X} = (\mathbf{QI})^T \mathbf{C}^T \mathbf{X}^T$ (***n*** restricciones)
3.2) ***Q*I>0** (***n*** restricciones)
3.3) $\mathbf{YBQI} = (\mathbf{I}+\mathbf{E}_x)\mathbf{XCQI}$ (***n*-1** restricciones)
donde hacemos $\mathbf{E}_{x1} = \mathbf{E}_{x2} =$ -------- $= \mathbf{E}_{xn}$

Cálculo de la mercancía-patrón con programación lineal V

Se intentará en este epígrafe seguir una estrategia de cálculo de los multiplicadores de la mercancía-patrón, además de demostrar algunas propiedades derivadas de una planificación de la economía sujeta a este criterio. Sean las ecuaciones que definen el sistema que ya hemos visto en anteriores epígrafes.

(170) $$PY = (1+g)\left[wL + PX\right]$$

(171) $$PY = (1+g_m)PX$$

(172) $$LI_v = 1$$

La mercancía-patrón se construye a partir de la ecuación matricial:

(173) $$uYQ_{nxn}I_{nx1} = XQ_{nxn}I_{nx1}$$

El problema en el caso de la producción conjunta es que si despejamos los multiplicadores en (173), queda $\mathbf{uQI}=\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{XQI}$, donde no podemos garantizar que los multiplicadores ***Q*I** sean todos positivos dado la presencia de la matriz resultante $\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}$, que no se puede garantizar a su vez que sea estrictamente positiva debido a que estamos en la producción conjunta (***Y*** no es diagonal, por lo que no se puede aplicar Perron-Frobenius). No se puede aplicar salvo que transformáramos la matriz ***Y*** de tal forma que $\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}$ fuera una matriz estrictamente positiva (todos sus elementos fueran mayores que cero). Tal fin se puede conseguir si reasignamos los procesos de los distintos bienes y servicios (columnas de ***Y***) a partir de una matriz ***S*** cuadrada ***n*x*n***, que llamaremos de *reasignación* tal que cumpliera los siguientes requisitos:

(174) $$\boxed{YSI_v = YI_v}$$

(175) $$\boxed{(YS)^{-1}X > 0}$$

(176) $$\boxed{I_hS = I_h}$$

siendo $\mathbf{I}_v$ el vector vertical de unos y $\mathbf{I}_h$ el vector horizontal también de unos. La primera matriz (174) hace que el vector de productos finales tras la reasignación sea igual que el primitivo; la ecuación (175) es la que permite solventar el problema que plantea la producción conjunta en el cálculo de los multiplicadores (que $\boldsymbol{QI}$ sea positivo); la última (176) hace que $\boldsymbol{S}$ sea una matriz de ponderación según columnas (la suma por columnas de la matriz es uno). Para conseguir que se cumplan los 3 sistemas de ecuaciones anteriores planteamos el siguiente problema de programación lineal:

- función objetivo: $\mathbf{I}_v\boldsymbol{S}\mathbf{I}_v = \boldsymbol{n}$
- variables a cambiar o calcular: matriz $\boldsymbol{S}$ de $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ elementos
- restricciones:

a. $\boldsymbol{YS}\mathbf{I}=\boldsymbol{Y}\mathbf{I}$ ($\boldsymbol{n}$ restricciones)
b. $(\boldsymbol{YS})^{-1}\boldsymbol{X}>0$ ($\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ restricciones)

Resumiendo, tenemos un problema de programación lineal con $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ variables de $\boldsymbol{S}$ a modificar con $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}x\boldsymbol{n}$ restricciones. Garantizado que $(\boldsymbol{YS})^{-1}\boldsymbol{X}>0$, podemos aplicar Perron-Frobenius. Veamos un ejemplo a partir de datos que ya conocemos. Sea la matriz de productos finales $\boldsymbol{Y}$, la de medios $\boldsymbol{X}$ y la de inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$ tal como:

Y = productos finales			YI
80	45	55	180
135	200	115	450
120	40	320	480

X = medios producción			XI
90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

L = inputs de trabajo			LI
0,300	0,200	0,500	1,000

Con los criterios anteriores de programación lineal con la función objetivo $\mathbf{I}_v\boldsymbol{S}\mathbf{I}_v = \boldsymbol{n}$ obtenemos una matriz de reasignaciones (aunque con algunos elementos negativos) tal como $\boldsymbol{S}$:

	S			
	1,573	0,567	-1,140	
	-0,210	-0,605	1,816	
	-0,363	1,039	0,324	ISI
IS =	1,000	1,000	1,000	3,000

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

Con las condiciones de restricción de que $(\boldsymbol{YS})^{-1}\boldsymbol{X}>0$:

$(YS)^{-1}X>0$		
0,933	0,238	0,000
0,000	0,328	0,532
0,000	0,283	0,001

Y con la señalada de que el vector ***YS*I-*Y*I** sea igual a cero.

Y = productos finales			YI	YS			YSI	YSI-YI
80	45	55	180	**96,43**	**75,23**	**8,34**	180	0,00
135	200	115	450	**128,57**	**74,88**	**246,55**	450	0,00
120	40	320	480	**64,29**	**376,14**	**39,57**	480	0,00

Y ahora a la matriz ***YS*** se le puede aplicar Perron-Frobenius a partir de la ecuación de la mercancía-patrón $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{Q}\mathbf{I})=((\boldsymbol{YS})^{-1}\boldsymbol{X})(\boldsymbol{Q}\mathbf{I})$ o bien seguir con criterios de programación lineal, tal y como hemos hecho en epígrafes anteriores a partir de la matriz ***YS***, la matriz de medios ***X*** y la de inputs de trabajo ***L***. En el caso de resultados insatisfactorios con la función objetivo empleada, pruébese la función objetivo (escalar) **I*YS*I-I*Y*I** = **0**, es decir, la suma de la última columna del último cuadro que se ha presentado.

Una alternativa al sistema anterior consiste en introducir dos matrices de reasignación, una para los productos finales y otra para los medios de producción, lo cual ayuda a buscar una solución óptima. Partimos de los mismos datos que la anterior de productos finales, medios de producción e inputs de trabajo tal como:

Y = productos finales			YI
80	45	55	180
135	200	115	450
120	40	320	480

X = medios producción			XI
90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

L = inputs de trabajo			LI
0,300	0,200	0,500	1,000

Ahora modificamos la ecuación de construcción de la mercancía patrón de tal forma que pasa a ser:

(177) $$uY_{nxn}S_{nxn}Q_{nxn}I_{nx1} = X_{nxn}T_{nxn}Q_{nxn}I_{nx1}$$

donde, además de la matriz (que puede ser diagonal o no) ***S*** de *reasignaciones de los productos finales* ***Y***, tenemos la matriz ***T*** (también posiblemente diagonal o no) de *reasignaciones de los medios de producción* ***X***. De nuevo el motivo de reasignar las columnas de la matriz ***Y*** se debe a la posibilidad (casi la seguridad absoluta) de que la matriz $\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}$ no sea estrictamente positiva, lo cual imposibilitaría aplicar Perron-Frobenius en la ecuación de construcción de la mercancía- patrón ***uY***(***QI***)=***X***(***QI***). Ahora, mediante una matriz tal como ***S*** construida bajo la condición de que se cumpla que:

(178) $$(YS)^{-1}XT > 0$$

podemos aplicar Perron-Frobenius a la matriz:

(179) $$u(QI) = (YS)^{-1}XT(QI)$$

porque la matriz resultante $(\boldsymbol{YS})^{-1}\boldsymbol{XT}$ cumple los requisitos del teorema de ser cuadrada y no negativa. La suponemos también indescomponible (para aplicar la versión fuerte del teorema). La no negatividad la hemos garantizado con (178). La matriz ***T*** es simplemente un modo de facilitar la reasignación de tal modo que no caiga toda la responsabilidad en la matriz ***S***. Simplemente es un recurso. Tanto la matriz resultante ***YS*** con respecto a ***Y*** como la matriz resultante de ***XT*** respecto a ***X*** servirán si cumplen (además para el caso de ***Y*** con (178) de que la suma de todos los bienes y servicios (suma por columnas, es decir, por procesos) tras la reasignación sea igual a la suma de estos bienes y servicios en la matriz original. Lo mismo ha de ocurrir con la matriz de productos. Es decir, se ha de cumplir que:

(180) $$YSI = YI$$

(181) $$XTI = XI$$

Damos a continuación los cuadros de datos de estos dos requisitos junto con el expresado por (178) que ya hemos comentado:

$(YS)^{-1}XT>0$

0,000	0,001	0,000
0,128	0,349	0,641
0,530	0,411	0,256

Y = productos finales			YI	YS			YSI	YSI-YI
80	45	55	180	23,1	99,2	57,8	180,0	0,00
135	200	115	450	202,6	141,7	105,7	450,0	0,00

120	40	320	480	137,5	0,0	342,5	480,0		0,00

X = medios producción			XI	XT			XTI	XTI-XI
90	50	40	180	43,3	58,4	78,3	180,0	0,00
120	125	40	285	74,1	93,1	117,8	285,0	0,00
60	150	200	410	181,5	141,0	87,5	410,0	0,00

Puede comprobarse en lo anterior que las matrices ***YS*** y ***XT*** son no negativas (semi-positivas estrictamente). Damos la matriz $\boldsymbol{Y^{-1}X}$ para que pueda comprobarse de que esta sí que no era estrictamente positiva:

$Y^{-1}X$		
1,468	0,237	0,300
-0,196	0,265	-0,320
-0,339	0,347	0,552

Cabe preguntarse cómo se ha obtenido ***S*** y ***T***, pero antes pasamos al siguiente punto. De momento exponemos el resultado numérico de su cálculo:

	S			SI		T			TI
	-0,791	1,730	0,062	1,000		-0,017	0,299	0,718	1,000
	1,217	-0,093	-0,124	1,000		0,417	0,343	0,240	1,000
	0,574	-0,637	1,063	1,000		0,599	0,358	0,043	1,000
IS =	1,000	1,000	1,000		IT =	1,000	1,000	1,000	

El siguiente punto es el cálculo de los multiplicadores ***QI*** (desgajado en la matriz ***Q*** ***n***x***n*** y el vector de unos **I**). Para ello empleamos el criterio de Sraffa de construcción de la mercancía-patrón, pero sin aplicar Perron-Frobenius. Es verdad que, de acuerdo con lo anterior y como hicimos anteriormente, una vez calculado ***S*** con la condición de la ecuación (178) podríamos pararnos y recurrir al teorema para obtener el autovalor ***u*** y el autovector ***QI***, pero ahora seguimos otro camino que ya conocemos: el de la programación lineal. Si conocemos (lo suponemos de momento) las matrices ***S*** y ***T*** de reasignaciones, nos queda calcular estos autovectores (***QI***) -los multiplicadores- a partir de la ecuación del excedente:

(182) $$YSQI = (I + E_x)XTQI$$

donde $\boldsymbol{E}_x$ es el excedente que corresponde a cada bien o servicio (filas). La condición *esrafiana* que imponemos para calcular el vector ***QI*** es que se cumpla que todos los excedentes de todos los bienes y servicios sean iguales. Es decir, que se cumpla:

(183) $$E_{x1} = E_{x2} = ----------- = E_{xn} = R_C$$

A estas igualdades la llamamos –de acuerdo con Sraffa- razón-patrón de la producción conjunta, aunque el procedimiento de cálculo pueda pensarse que no es el de Sraffa[33]. Impuesta esta condición en nuestro ejemplo, exponemos el resultado numérico:

YSQI = (I+$\mathbf{E}_x$)XTQI	
(I+$\mathbf{E}_x$)	**E**x = excedente
1,22	22,22%
1,22	22,27%
1,22	22,27%

El resultado de ello es la mercancía-patrón:

YSQ = mercancía-patrón			YSQI
58,4	58,4	132,9	249,7
83,7	83,7	219,9	387,2
0,5	0,5	442,2	443,1

XTQ = mercancía-patrón			XTQI
34,4	34,4	135,4	204,3
54,9	54,9	206,8	316,7
83,2	83,2	196,1	362,4

L_p = inputs de trabajo			LQI
0,118	0,118	0,763	1,000

Como hasta ahora nada hay de misterioso en el cálculo de las matrices ***S***, ***T*** y ***Q***. Se ha utilizado la programación lineal, aunque se haya hecho por etapas para asegurarse primero el cálculo de ***S***, luego de ***T*** y, por último, de ***Q***. Como función objetivo nos hemos fijado el excedente en términos monetarios. Es decir, hemos planteado un problema de programación lineal cuya función objetivo es la maximización del excedente o razón-patrón de la producción conjunta $\boldsymbol{R}_c$:

(184) $$\boxed{R_c = \frac{L[YS - XT]QI}{LXTQI}}$$

con las variables a modificar ***S***, ***T*** y ***Q***, sujeta a las siguientes restricciones:

(185) $$YSI = YI$$ (***n*** restricciones)

(186) $$XTI = XI$$ (***n*** restricciones)

(187) $$YS > 0$$ (***n***x***n*** restricciones)

[33] Este procedimiento está más cerca de lo que pueda pensarse al criterio de Sraffa de acuerdo con lo expresado por el economista italiano en **PMPM** en el epígrafe 64 (cap. VIII, pág. 79 en la versión española de Oikos-Tau).

(188) $$XT > 0$$ (***n*** restricciones)

(189) $$IS = I$$ (***n*** restricciones)

(190) $$IT = I$$ (***n*** restricciones)

(191) $$E_{x1} = E_{x2} = ------ = E_{xn} = R_C$$ (***n*-1** restricciones)

(192) $$(YS)^{-1} XT > 0$$ (***n*x*n*** restricciones)

(193) $$YSQ > 0$$ (***n*x*n*** restricciones)

(194) $$XTQ > 0$$ (***n*x*n*** restricciones)

(195) $$LQI = 1$$ (**1** restricción)

El recuento nos ha dado 3n^3 variables a determinar (***S***, ***T*** y ***Q***) y 6n+4n^3 restricciones. El resultado final de la función objetivo tras la optimización y el excedente original es:

Rq = L(YS-XT)QI / LXTQI = **22,259%**

R = L(Y-X)I / LXI = **21,519%**

Fruto del reagrupamiento y con el mismo trabajado agregado expresado en término de trabajo (***L*I**=***LQ*I**=**1**), se ha aumentado ligeramente el excedente (de 21,519% a 22,529%). Todo lo anterior merece algún comentario. En primer lugar, hemos dejado fuera el requisito de cálculo de los multiplicadores ***Q*I** que hemos venido empleando:

(196) $$(QI)^T (YS)^T (YS)^{-1} X = (QI)^T (XT)^T$$

Para una hoja de cálculo de ordenador la ecuación (196) es una gran complicación, sobre todo por el cálculo de la inversa que aparece. Hay que imaginarse la inversa de un modelo que intentara una fotografía de lo real con la módica cifra de 200 filas y 200 columnas. Aquí no la hemos empleado y los multiplicadores se calculan en función de las veces que aparecen en las restricciones y en la función objetivo. Segundo aspecto a señalar es que las matrices de reasignación ***S*** y ***T*** podrían ser diagonales, con lo que el número de restricciones bajaría notablemente, pero aun así deberían ser suficientes para calcular los multiplicadores sujetos al objetivo. En el caso de diagonales, todo lo dicho hasta aquí sería válido sólo que, en este caso de diagonal, se cumpliría que S^T=***S*** y T^T=***T***. Lo que sí es discutible el cálculo de los inputs de trabajo ***LQ*** para la producción de la mercancía-patrón. ***Y*** lo es, no por el uso del numerario, sino porque el resultado de ***LQ*** para la mercancía-patrón carece de lógica económica. La razón de ello es que Sraffa no supone ninguna función o modelo de producción que pueda ligar funcionalmente producción con medios de trabajo y el propio trabajo. Las razones de ello pueden deducirse de las intenciones expresadas en *Producción de mercancías por medio de mercancías* y en otros escritos y cartas que, ahora, a los cincuenta años de su

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

muerte, se va sabiendo. La función neoclásica de producción considera que el capital –los medios de producción en Sraffa- es sustitutivo del trabajo y así desarrollaron la teoría del capital, considerando una relación convexa entre capital y trabajo para una producción dada (isocuantas). Sin embargo, la realidad ha ido por otro lado y hay que considerar que, en la mayoría de las ocasiones, capital y trabajo son complementarios. En todo caso, la postura más correcta sería un cierto eclecticismo y considerar que es un problema de contrastación empírica, que es como se trabaja en la economía moderna. A modo de ejemplo, aquí intentaré reestructurar los inputs de trabajo del vector resultante (***LQ***) del modelo a partir de los datos ***L*** originales. Para ello vamos a suponer que el trabajo es dependiente tanto del producto final como de los medios de producción de acuerdo con la función:

(197) $$L = H\,Y^{a}X^{b}$$

donde ***H*** es una matriz que determina la escala de la necesidad de trabajo por unidad de producto y de medios de producción, y ***a*** y ***b*** serían exponentes de ponderación o influencia de ***Y*** y de ***X***. Para simplificar el modelo (modelo didáctico), suponemos que la matriz ***H*** es una matriz diagonal de unos y que los exponentes ***a*** y ***b*** valen **1**. Damos a continuación el resultado numérico del ejemplo que venimos utilizando:

$X \otimes Y$			$X \otimes YI$	$XT \otimes YS$			$XT \otimes YSI$
7200	2250	2200	11650	999	5788	4524	11311
16200	25000	4600	45800	15020	13193	12444	40657
7200	6000	64000	77200	24946	0	29982	54928
			134650				106896

No se trata de un productos matricial en ningún caso, sino que $X \otimes Y$ y $XT \otimes YS$ se ha construido de tal forma que un elemento del primero, de $X \otimes Y$, es el producto sólo del elemento $\boldsymbol{x}_{ij}$ por el elemento $\boldsymbol{y}_{ij}$ (y así con el resto de los elementos de la matriz resultante). Lo mismo para la matriz $XT \otimes YS$. La idea es ahora construir los inputs de trabajo con el criterio expresado (197) de tal forma que estos inputs de trabajo vendrían dados por la expresión:

(198) $$X \otimes YI = l_i XT \otimes YSI$$

El resultado es el vector (lo hemos transpuesto) de inputs de trabajo:

$$X \otimes YI = l_i XT \otimes YSI$$

$\mathbf{l_i}$ =	0,291	0,178	0,356	0,825

Y normalizado el vector anterior para que su suma sea 1 (numerario) queda:

$X \otimes YI = l_i XT \otimes YSI$ normalizado

$\mathbf{l}_{ni}$ =	0,353	0,215	0,431	1,000

inputs de trabajo de origen

0,300	0,200	0,500	1,000

inputs de trabajo de la mercancía-patrón
e inputs de origen

17,7%	7,7%	-13,7%

Los tres cuadros de datos anteriores han servido para comparar el trabajo calculado para la mercancía-patrón (0,353;0,215;0,431) y los inputs originales (0,300;0,200;0,500). El último cuadro expresa la diferencia entre ambos en porcentaje.

Consecuencias de la mercancía-patrón (incluso en la p. conjunta)

Una vez que sabemos cómo calcular algunas de las infinitas posibles mercancías-patrón en la producción conjunta cabe preguntarse para qué sirve ello, qué bondades económicas guarda, por ejemplo, una economía construida a partir del criterio de la mercancía-patrón. Veamos algunas:

I – Tasas máximas de salario y ganancia.
Sea una economía definida por la ecuación:

(199) $$P_q YSQ = (1+g)\left[wL_q + P_q XQ\right]$$

donde ahora los precios $\boldsymbol{P}_q$ de la mercancía-patrón no tienen por qué ser los mismos que los definidos por la ecuación anterior respecto al criterio patrón. Lo mismo ocurre con los inputs (ahora $\boldsymbol{L}_q$) de trabajo, los productos finales (***YSQ***) y lo medios de producción (***XQ***). Como es habitual, hacemos ahora cero la tasa de salarios para calcular la tasa máxima del sistema:

(200) $$P_q YSQ = (1+g_{mq})P_q XQ$$

donde ahora la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{mq}$ no tiene que ser la misma que la de la economía anterior a la aplicación del criterio de la mercancía-patrón ($\boldsymbol{g}_m$). También -como es habitual- hacemos cero la tasa de ganancia en (199) para obtener la tasa máxima de salarios ($\boldsymbol{w}_{mq}$) que, al igual que en el caso anterior, no tiene por qué coincidir esta tasa máxima de salarios -que llamamos *de-mercancía-patrón-* con la de la *pre-mercancía-patrón* ($\boldsymbol{w}_m$). Queda:

(201) $$P_q YSQ = \left[w_{mq} L_q + P_q XQ\right]$$

De las ecuaciones (200) y (201) obtenemos:

(202) $$P_q = \frac{w_{mq}}{g_{mq}} \times L_q Q^{-1} X^{-1}$$

Sustituimos ahora los precios obtenidos en (202) en la ecuación de derivada del sistema (200) y queda:

(203) $$(\frac{w_{mq}}{g_{mq}} \times L_q Q^{-1} X^{-1}) YSQ = (1 + g_{mq})(\frac{w_{mq}}{g_{mq}} \times L_q Q^{-1} X^{-1}) XQ$$

Ahora eliminamos términos comunes y, además, hacemos el supuesto de que $\boldsymbol{L}_q$ = ***LQ***, cosa que no hace Sraffa, porque el economista italiano lo que sí establece es que ***L*I**=***LQ*I**=**1**, es decir, el trabajo de la mercancía-patrón también lo utiliza como numerario. El resultado es:

(204) $$\boxed{LX^{-1} YSQ = (1 + g_{mq}) LQ}$$

Si ahora post-multiplicamos la ecuación matricial (204) por el vector vertical de unos **I** y tenemos en cuenta el criterio de Sraffa sobre el trabajo (***LQ*I**=**1**, es decir, su empleo como numerario), sale que la tasa máxima de ganancia es:

(205) $$\boxed{g_{mq} = LX^{-1}(YS - X)QI}$$

Recordamos ahora la tasa máxima de ganancia de una economía previa a la mercancía-patrón:

(206) $$g_m = LX^{-1}(Y - X)I$$

Ambas tasas sólo serán iguales ($\boldsymbol{g}_m$=$\boldsymbol{g}_{mq}$) si se cumple la expresión:

(207) $$LX^{-1} YSQI = LX^{-1} YI$$

El cálculo de la tasa máxima de salarios en la mercancía-patrón es más sencillo porque surge de tomar otro numerario para el sistema definido a través de la mercancía-patrón tal como:

(208) $$P_q YSQI - P_q XQI = 1$$

y sustituirlo en la ecuación (201). El resultado es:

(209) $$P_q YSQI - P_q XQI = w_{mq} LQI = 1$$

y dado que ***LQ*I=1** (primer numerario de Sraffa), sale que:

(210) $$\boxed{w_{mq} = 1}$$

con lo que la tasa máxima de salarios acapara todo el excedente medido en ¡términos monetarios! (***P***q***YSQ*I-*P***q***XQ*I=1**). Esta tasa *de mercancía-patrón* –a diferencia de la tasa máxima de ganancia– sí es igual a la tasa de salarios máxima previa al cálculo de la mercancía-patrón, es decir, sí se cumple que $\boldsymbol{w}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{w}_{\mathrm{mq}}$. Aunque pueda sorprender esta asimetría, el hecho es inapelable.

II – Reparto del excedente (o distribución de rentas)

El excedente *no monetario esrafiano* en la producción conjunta viene dado por la matriz diagonal ***n*x*n*** $\boldsymbol{E}_{\mathrm{c}}$ en la ecuación matricial:

(211) $$YI = (I + E_c)XI$$

En general, en la ecuación anterior se cumplirá que los excedentes $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ci}}$ serán diferentes para cada bien o servicio. Pero cuando pasamos al criterio de la mercancía-patrón (y esta es su finalidad), estos excedentes se harán iguales. Dicho de otra forma, en la ecuación *de-mercancía-patrón*:

(212) $$YSQI = (I + E_{qc})XQI$$

los excedentes $\boldsymbol{E}_{\mathrm{qci}}$ serán iguales entre sí porque con este criterio, precisamente se ha construido la mercancía-patrón (***YSQ*I** y ***XQ*I**). Es decir, se cumplirá en (212) que:

(213) $$E_{qc1} = E_{qc2} = ------- = E_{qcn} = R_c$$

Y ahora hemos llamado a estos iguales excedentes *razón-patrón* ($\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}$) de la mercancía-patrón en la producción conjunta. Con ello queda:

(214) $$\boxed{YSQI = (I + R_c)XQI}$$

Si ahora *pre-multiplicamos* la ecuación matricial (214) por el vector horizontal de precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{q}}$ *de-mercancía-patrón* sale:

(215) $$P_q YSQI = (1 + R_c)P_q XQI$$

donde $\mathbf{1}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}$ es ya un escalar y no una matriz diagonal ***n*x*n*** como era ($\mathbf{I}+\boldsymbol{R}_{\mathbf{c}}$). Recurrimos ahora a la ecuación de definición del sistema económico *esrafiano*

(199) y, teniendo en cuenta los numerarios que ya hemos utilizado $\boldsymbol{P_qYSQI}$-$\boldsymbol{P_qXQI}$=**1** y $\boldsymbol{LQI}$=**1**, queda:

(216) $$1 = (1 + g)w + gP_qXQI$$

Por otro lado, de (215) y del numerario $\boldsymbol{P_qYSQI}$-$\boldsymbol{P_qXQI}$=**1**, obtenemos:

(217) $$1 = R_cP_qXQI$$

Y eliminando $\boldsymbol{P_qXQI}$ entre las ecuaciones (216) y (217) sale:

(218) $$\boxed{g = \frac{(1-w)R_c}{1+wR_c}}$$

¡que es la ecuación de reparto del excedente de Sraffa, pero con salarios *pre-factum*! Si hubiéramos empleado salario *post-factum*, es decir, si la ecuación de definición del sistema hubiera sido:

(219) $$P_qYSQ = wL_q + (1+g)P_qXQ$$

se hubiera obtenido la ecuación *esrafiana* del excedente $\boldsymbol{g}$=(**1-w**)$\boldsymbol{R}_c$. El resultado de todo esto merece algún comentario mayor. El conjunto de condiciones formales que hemos exigido como definición del sistema nos ha llevado a demostrar que el criterio de reparto del excedente (ecuación 218) es independiente de los precios (cosa que ya sabemos que se da en la producción simple *esrafiana*) también en la producción conjunta; es, además, exactamente el mismo que en la producción simple.

III – Precios

¿Son exactamente los mismos precios los obtenidos a través de la mercancía-patrón que en la economía previa a la obtención de este modelo? La ecuación que define los precios en función de las tasas máximas en el modelo previo es:

(220) $$\boxed{P = \frac{w_m}{g_m} \times LX^{-1}}$$

Y la calculada tras montar el sistema de mercancía-patrón:

(221) $$P_q = \frac{w_{mq}}{g_{mq}} \times L_qQ^{-1}X^{-1}$$

Pero dado que hemos adoptado el criterio de que $\boldsymbol{L}_q$=$\boldsymbol{LQ}$, sale que:

(222) $$\boxed{P_q = \frac{w_{mq}}{g_{mq}} \times LX^{-1}}$$

La diferencia –si es que la hay– va a depender de las tasas máximas de ganancia y de salarios. Ambas tasas ya las hemos calculado. Sabemos que la tasa de salarios máxima previa a la mercancía-patrón es la misma que la calculada tras adoptar este criterio, pero no así la tasa máxima de ganancia. Para la previa a la mercancía-patrón tenemos:

(223) $$g_m = LX^{-1}(Y - X)I$$

Y para la mercancía-patrón es:

(224) $$g_{mq} = LX^{-1}(YS - X)QI$$

Pues bien, si reemplazamos (223) -y teniendo en cuenta que la tasa máxima de la mercancía-patrón vale $\boldsymbol{w_{mq}}$=**1-** en (222) sale:

(225) $$\boxed{P_q = \frac{1}{LX^{-1}(YS - X)QI} \times LX^{-1}}$$

Y los precios previos a la mercancía-patrón van a ser :

(226) $$\boxed{P = \frac{1}{LX^{-1}(Y - X)I} \times LX^{-1}}$$

Si comparamos un precio particular ***i*** de ambos criterios quedaría:

(227) $$\boxed{P_{qi} = P_i \times \frac{LX^{-1}(Y - X)I}{LX^{-1}(YS - X)QI}}$$

¡Es decir, los precios de la mercancía-patrón serán proporcionales a los precios previos!, todos con el mismo factor de proporcionalidad dado que el cociente que figura en (227) es un escalar.

IV – Crecimiento

Ya hemos visto que el criterio de la mercancía-patrón hace que podamos relacionar los medios de producción con los productos finales de tal forma que la proporción entre estos sea la misma para todos los bienes y servicios. La ecuación que hemos concluido como representativa de tal economía sería:

(228) $$YSQI = (I + R_c)XQI$$

Muy diferente de la ecuación que nos señalaba el excedente de una situación de hecho en la economía tal como:

(229) $$YI = (I + E_c)XI$$

donde, mientras $\boldsymbol{R}_c$ es una escalar que indica que la proporción entre productos finales (***YSQ*I**) y medios de producción (***XQ*I**) es la misma, en (229), cada excedente $\boldsymbol{E}_{ci}$ sería diferente para cada bien y servicio ***i*** (filas). Si consideramos –sin pérdida de generalidad y sin cambio conceptual– que el producto final sea en realidad el medio de producción del período siguiente, es decir, si hacemos que $\boldsymbol{Y}$=$\boldsymbol{X}_{(\mathbf{t+1})}$ y llamamos $\boldsymbol{X}_{\mathbf{t}}$ al ***X*** en (228) queda:

(230) $$SX_{t+1}QI = (1 + R_c)X_tQI$$

La razón patrón será, además, la tasa de crecimiento de la economía. Y si además *post-multiplicamos* (230) por el vector de precios (que se supone que en equilibrio de precios no ha cambiado), obtendremos:

(231) $$PSX_{t+1}QI = (1 + R_c)PX_tQI$$

¡que es además la tasa máxima de ganancia ($\boldsymbol{g}_{mq}$) a que da lugar el sistema! Aunque hayamos partido de criterios distintos –en algunos casos contrarios– de los de los modelos neoclásicos de crecimiento, esta conclusión y bajo los supuestos hechos, es la misma a la que llegan estas corrientes de pensamiento económico. Ello es verdad aunque no hayamos podido abandonar para tal conclusión ni la matriz de reasignaciones ***S*** ni la matriz de multiplicadores ***Q***. Más aún, de no ser por ambas no hubiéramos arrumbado tal similitud.

Tres conclusiones: 1) También en la producción conjunta es posible –aunque en este epígrafe no se ha demostrado que siempre lo sea– calcular la razón-patrón aplicando Perron-Frobenius mediante una matriz auxiliar ***S*** (que hemos llamado de reasignaciones) de tal forma que se cumpla que la matriz $(\boldsymbol{YS})^{-1}\boldsymbol{X}$ sea positiva (o al menos no negativa) en todos sus términos. Con ello obtenemos una razón-patrón sólo dependiente de las variables físicas del sistema (trabajo, productos finales y medios de producción). Esto permite construir no sólo una economía virtual como la que desarrolló o inventó Sraffa, sino que mediante reasignaciones entre procesos (columnas de ***Y***) es posible llegar a una economía tal como ***YS*** donde se cumple que ***YS*I**=***Y*I**. 2) Una economía así descrita, es decir, una vez hechas las reasignaciones entre procesos, sería inmune a las variables monetarias del sistema porque el reparto del excedente (ecuación 229) y el mismo excedente ($\boldsymbol{R}_c$) no depende de los precios y, por ello, tampoco le influiría la cantidad de dinero puesta a su disposición a través de su banco central. Por el contrario, en una economía de excedentes diversos las variables monetarias sí influirían. La razón de ello es que los costes de los bienes y servicios dependerían de las proporciones monetarias entre costes de trabajo y costes de medios de producción. En una economía *de mercancía-patrón* la proporción entre medios y trabajo es siempre la misma en el proceso de traslación hacia atrás en el tiempo entre las relaciones intersectoriales (relaciones entre clientes y proveedores dentro del mundo de la empresa). 3) Podría fijarse una tasa de crecimiento igual o proporcional a la razón-patrón con la seguridad que no tendrían que producirse reasignaciones entre sectores (en realidad ya lo hemos hecho con la matriz ***S*** aplicada a los productos finales ***Y***) para cumplirse la meta del crecimiento del excedente (el crecimiento se mediría por el crecimiento del excedente). Tampoco tendrían influencia los criterios monetarios de política económica.

Planificación con criterios *esrafianos*

I – Criterio de mercancía-patrón

Aunque nada más lejos probablemente de las intenciones de Sraffa, lo que sí puede desprenderse de su obra capital es la posibilidad de establecer una planificación de la economía. Esa planificación, desde luego, tendría criterios muy distintos de los que desarrollaron en el plano teórico en los años 20 y 30 del siglo pasado el economista inglés Fred Taylor[34] y el economista polaco Oskar Lange[35] a partir de un escrito del economista italiano Enrico Barone[36]. ¿Cuál sería la principal virtud de una economía planificada con criterios *esrafianos*? La respuesta no tiene duda: la nula –al menos en el plano teórico– influencia de los precios en la asignación de los procesos (recursos, por analogía, en el plano teórico marginalista) una vez construida una economía real bajo el criterio de la mercancía-patrón. Como es sabido, este criterio consiste en que todos los excedente relativos (razón-patrón única) de todos los bienes y servicios fueran iguales. Al cumplirse tal requisito, los precios no influirían en la composición diversa de los costes en los procesos de traslación hacia atrás en el tiempo de las compra-ventas de bienes, servicios y medios entre las empresas. Sería una economía inmune a la variación relativa de los precios porque la composición de la economía entre sectores (mejor procesos) haría que, fuera cual fuera el vector de precios de la economía, el sistema se reproduciría así mismo sin nuevas reasignaciones de recursos. Se trata de un caso extremo, desde luego, porque habría que ir considerando dos aspectos fundamentales que no contempló Sraffa en su libro: el papel de la demanda y sus cambios, y las posibilidades de crecimiento de la economía. ¿Cómo se conseguiría esto? Pues como lo hemos hecho para la búsqueda de la mercancía-patrón, sólo que pasando del plano virtual en el que permanece al plano real mediante reasignaciones reales de los procesos de la economía (podría darse en el plano teórico mediante reasignaciones entre empresas). Otra cosa son los problemas políticos que una política de planificación *esrafiana* entrañaría porque la consecuencia primera es que no podría respectarse la llamada "libertad de empresa". En el epígrafe siguiente demostramos por qué los precios son inmunes a una reasignación de recursos con criterios de mercancía-patrón. Una segunda virtud de una economía

---

[34] "*The Guidance of Production in a Socialist State*", American Economic Review, 1929.
[35] "*On the Theory Economic Socialist*", U. of Minnesota, 1938.
[36] "*Il ministro della produzione nello stato colletivista*", Giorgnale degli economisti", 1908; "*The Ministry of Production in the Colectivist State*", Routledge London, 1935.

planificada bajo estos criterios es que no afectaría al reparto del excedente porque este es inmune a los precios. Desde luego una economía bajo criterios *de mercancía-patrón* sería un caso extremo porque no parece que podría adecuarse este criterio con la demanda. Por eso una economía planificada bajo criterios *esrafianos* de mercancía-patrón podría relajarse en muchos aspectos hasta hacerla compatible con la demanda. Además, *el criterio de la mercancía-patrón* puede referirse a un período breve de tiempo, incluso un sólo año, de tal manera que se cambiara de un año a otro el excedente relativo, aunque este fuera único para todos los bienes y servicios de un mismo año. Lo razonable, en todo caso, sería atenuar esta igualdad extrema de excedente relativos para todos los bienes y servicios para un mismo año y establecer algunas diferencias relativas, pero sin perder las bondades del requisito de la mercancía-patrón. El objetivo último sería aumentar el excedente en términos de trabajo de un año con respecto al año anterior, lo cual se podría conseguir notablemente. La razón de ello es que una reasignación entre procesos -hasta construir por suma de todos los procesos la mercancía-patrón- permitiría reasignar también el trabajo entre procesos y los propios medios de producción de tal forma que se reforzaran los procesos con más capacidad de creación de excedente relativo en detrimento de los que tuvieran menor capacidad. También hemos obviado otro aspecto importante que obligaría a contemplar más condicionantes: la necesidad de adecuar el trabajo a las nuevas reasignaciones. Sin embargo el problema sería menor porque, a diferencia de la reasignación marginalista entre medios de producción para supuestamente optimizar utilidades y ganancias, aquí la reasignación es interna entre procesos, lo cual facilitaría el intercambio del trabajo entre empresas y procesos porque estos son los mismos en cuanto al objeto, es decir, en cuanto a la producción de bienes y servicios. Un ejemplo ayudará. Aquí de lo que se trataría es de que los trabajadores de *Iberdrola* pasaran a trabajar a *Hidroeléctrica* para producir la misma –o con el mismo trabajo– energía eléctrica medida en kw/hora si la productividad de Hidroeléctrica –medido en términos de excedente relativo– fuera mayor que en Iberdrola. No deben aprender un nuevo oficio ni abordar unos nuevos estudios. Con un pequeño tiempo de adiestramiento podrían adecuarse los trabajadores directos a los nuevos procesos o a las nuevas empresas. Muy contrario es lo que pasa con la reasignación marginalista, donde deben cambiar enteramente de oficio, lo cual es una posibilidad casi irrealizable si ha de hacerse en breve tiempo y de forma masiva. Veremos más adelante que mejores resultados en términos de excedente da una planificación que no respecte el criterio de la mercancía-patrón pero sí el resto del modelo *esrafiano*.

Damos aquí un ejemplo de reasignación de recursos a partir de los criterios de la mercancía-patrón (igualdad de excedentes relativos o razón-patrón única) que permite una aumento notable del excedente. Partimos de los mismos datos del ejemplo del epígrafe anterior:

Y = productos finales

			YI
80	45	55	180
135	200	115	450
120	40	320	480

X = medios producción

			XI
90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

L = inputs de trabajo

			LI
0,300	0,200	0,500	1,000

El criterio de construcción de la mercancía-patrón es exactamente el mismo que el de la segunda parte del epígrafe que hemos visto y que hemos titulado sobre el *Cálculo de la mercancía-patrón con programación lineal V*. La ecuación de construcción de la mercancía-patrón sería:

(232) $$uY_{nxn}S_{nxn}Q_{nxn}I_{nx1} = X_{nxn}T_{nxn}Q_{nxn}I_{nx1}$$

Toda la economía (con criterio de mercancía-patrón) está construida de la misma forma que en este epígrafe, de tal modo que las ecuaciones que surten el ejemplo que viene son las mismas que las utilizadas en este epígrafe (desde la ecuación 177 a la 198). No repetimos pues las ecuaciones. Lo que sí hemos hecho es añadir un criterio más, una restricción más, un requisito más que ha de cumplir la economía: que el total de medios de producción de cada bien y servicio antes de la reasignación (y construcción, por lo tanto, de la mercancía-patrón) ha de ser el mismo que el resultante tras la reasignación. Con ello se quiere mostrar cómo una economía que repitiera los mismos medios de producción de un período a otro, podría aumentar el excedente. Formalmente debería cumplirse la ecuación matricial:

(233) $$\boxed{XTQI = XI}$$

Damos sucesivamente la reasignación previa de los productos finales a a partir de la matriz ***S***:

S			SI
-0,742	1,542	0,200	1,000
1,467	0,139	-0,606	1,000
0,338	-0,204	0,866	1,000
1,063	1,477	0,460	

YS			YSI	YSI-YI
25,3	118,4	36,4	180,0	0,000
232,1	212,5	5,4	450,0	0,000
77,8	125,4	276,8	480,0	0,000

La reasignación de los medios de producción con la matriz ***T***:

T			TI
0,403	0,461	0,136	1,000
0,518	0,753	-0,271	1,000
0,195	-0,066	0,871	1,000
1,116	1,147	0,737	

XT			XTI	XTI-XI
70,0	76,4	33,6	180,0	0,000
120,9	146,7	17,4	285,0	0,000
140,9	127,3	141,8	410,0	0,000

Los multiplicadores resultantes de la optimización del excedente:

	Q = multiplicadores			QI
	-0,674	0,893	-0,101	0,118
	1,045	0,303	0,350	1,697
	0,367	0,316	- 1,199	1,250
IQ =	0,001	1,028	0,753	

YSQI = (I+**E**$_x$)XTQI	
(I+**E**$_x$)	**E**x = excedente
1,385	38,54%
1,385	38,54%
1,385	38,54%

La resultante de la mercancía-patrón:

YSQ=mercancía-patrón			YSQI
120,0	46,9	82,5	249,4
67,5	269,9	57,5	394,9
180,0	20,0	368,0	568,0

XTQ=mercancía-patrón			XTQI	YSQI/XTQI
45,0	75,0	60,0	180,0	1,385
78,1	146,9	60,0	285,0	1,385
90,0	119,5	200,5	410,0	1,385

Y, por último, el resultado final es el excedente relativo (***R***p) resultante en términos de trabajo comparado con el excedente de los datos originales (***R***e):

función objetivo

Rp = L(YS-XT)QI / LXTQI = **38,54%**

Re = L(Y-X)I / LXI = 21,52%

Puede comprobarse el aumento notable del excedente (del 21,52% al 38,54%). El trabajo agregado es el mismo y queda tras la reasignación (***L***p) como:

Lp = inputs de trabajo			LQI
0,190	0,170	0,640	1,000

Damos los inputs de trabajo anterior a la reasignación para poder comparar ambos:

L = inputs de trabajo			LI
0,300	0,200	0,500	1,000

Mantenemos la prevención y las críticas que hemos hecho en el epígrafe aludido. Según ese criterio y bajo la función de producción $L = (H \otimes ((Y^a \otimes X^b)I))^T$ (pero con ***H***=**I**$_{nxn}$ y con ***a***=***b***=1 en el ejemplo) quedaría la reasignación del trabajo entre procesos como sigue:

L = inputs de trabajo			LI
0,311	0,260	0,430	1,000

II – Sin mercancía-patrón (I)

Cabe preguntarse que, de no atenernos al criterio de la mercancía-patrón, el excedente, con los mismos datos de partida, aumentaría o no. No puede haber duda de que, eliminado el *corsé* de que todos los bienes y servicios tuvieran el mismo excedente relativo, el excedente ha de ser mayor. Eso es lo que hacemos en lo que sigue, pero no todos son ventajas, porque al eliminar esa restricción perdemos la cualidad de que los aspectos monetarios no influyan en los aspectos reales, con lo cual estaremos expuestos a la inflación. Vamos a dar un ejemplo de cómo una planificación cuyo objetivo fuera el aumento los excedentes relativos de todos los bienes y servicios, pero sin la restricción de la mercancía-patrón, podría aumentar notablemente el excedente relativo en términos de trabajo. Partimos de los mismos datos que en el ejemplo anterior, es decir, de:

L = inputs de trabajo			LI
0,300	0,200	0,500	1,000

Y = Productos finales			YI
80	45	55	180
135	200	115	450
120	40	320	480

X=medios producción			XI
90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

Introducimos una novedad respecto al ejemplo anterior de la mercancía-patrón: ahora suponemos invariable en el tiempo la relación entre productos finales y medios de producción por bien o servicio y proceso. Dicho de otra forma, suponemos rendimientos constantes, supuesto nada contrario al espíritu *esrafiano* y al criterio con que trabajó en *Producción de mercancías por medio mercancías*, aunque él dijera con cierta sorna en la introducción de la obra que él no hacía tal supuesto, pero que si se quería suponer, podía hacerse[37]. Suponemos por tanto que la relación entre productos y medios es igual antes de la optimización que después. Esta relación vendría dada por la matriz:

k = Y/X

0,889	0,900	1,375
1,125	1,600	2,875
2,000	0,267	1,600

Donde un término cualquier $\boldsymbol{k}_{ij}$ es igual al cociente entre $\boldsymbol{y}_{ij}$ y $\boldsymbol{x}_{ij}$. Procedemos ahora a optimizar la función excedente ***E***p tal como:

(234) $$Ep = \frac{Lp[Yp - Xp]I}{LpXpI}$$

donde ***L***p es el resultado de reasignar el vector ***L*** original de inputs de trabajo, ***Y***p es la matriz resultante ***Y***p=***k***$\otimes$***X***p, siendo ***X***p la matriz ***XT*** resultante de reasignar a su vez ***X*** a través de la matriz ***T*** de tal forma que el excedente ***E***p sea máximo. El vector de inputs de trabajo tras la optimización queda como:

Lp = inputs de trabajo			LpI
0,000	1,000	0,000	1,000

Vemos que se ha producido una reasignación brutal entre inputs de trabajo del primer bien o servicio y del tercero hacia el segundo, de tal forma que queda la economía sin producir los dos primeros bienes. Ello es comprensible si tenemos en cuenta los excedentes de origen de los tres bienes o servicios de partida tal como se expresa en:

Y = productos finales			YI	X=medios producción			XI	YI-XI
80	45	55	180	90	50	40	180	0
135	200	115	450	120	125	40	285	165
120	40	320	480	60	150	200	410	70

Los excedentes son respectivamente para los tres bienes o servicios de la economía vienen indicados por la columna ***YI-XI***, donde podemos comprobar que el mayor excedente se da precisamente en el segundo bien o servicio (165). No es un supuesto realista, por lo que en el siguiente ejemplo acotaremos esta reasignación –así como la de medios de producción- en aras, precisamente, del realismo. Damos también la matriz ***T*** que ha permitido reasignar los procesos expresados por las columnas de la matriz de medios ***X*** de tal forma que se convierte en ***X***p mediante ***X***p=***XT***.

[37] Mi opinión es que Sraffa ya puede dejar al libre albedrío del lector cuando llega al capítulo VI del capital como trabajo fechado y que tenía razón Keynes cuando decía que había que hacer tal supuesto leyendo su obra.

T				Xp = XT			Xpl		Xpl-XI
0,642	0,333	0,025		75,3	63,3	41,4	180,0		0,000
0,320	0,667	0,013		118,5	123,3	43,1	285,0		0,000
0,038	0,000	0,962		94,2	120,0	195,8	410,0		0,000
1,000	1,000	1,000							

La última columna es una restricción más impuesta al sistema que indica que exigimos que el total de medios de producción por bien o servicio sea el mismo antes y después de la reasignación[38], es decir, que se cumpla que ***X*pI=*X*I**. Los productos finales con el criterio ya expuesto de rendimientos constantes y el excedente resultante se indican a continuación:

Yp = K⊗Xp			Ypl		Xp = XT			Xpl		Ypl-Xl
35,6	81,0	68,8	185,3		40,0	90,0	50,0	180,0		5,3
45,0	192,0	359,4	596,4		40,0	120,0	125,0	285,0		311,4
400,0	16,0	240,0	656,0		200,0	60,0	150,0	410,0		246,0

Y el excedente resultante en términos de trabajo es:

Ep = Lp(Yp-Xp)I / LpXpI =	**109,25%**
Ee = L(Yp-Xp)I / LXpI =	59,13%
E = L(Y-X)I / LXI =	21,52%

Vemos el aumento brutal del excedente al pasar de 21,52% de los datos originales a 109,25%. Además, se puede establecer qué parte corresponde a la reasignación de procesos para los medios originales (59,13%) y que parte corresponde a la reasignación del trabajo (de 59,13% a 109,25%). Aunque los datos son ficticios y no corresponden ni de forma agregada a una economía real puede intuirse el efecto sobre la economía de planificaciones forzadas como son las de los períodos de guerra (Alemania de Hitler, la Rusia de Stalin, ambas en la II Guerra Mundial y años previos), donde la economía de mercado y la libertad de empresa deja de funcionar y se procede a la reestructuración de procesos económicos. Con este ejemplo sólo se pretende avanzar una explicación del hecho inexplicado por la economía convencional de los aumentos extraordinarios de determinados sectores en economías de guerra. La explicación tradicional es que estos aumentos se deben a cambios extraordinarios –aunque forzados- entre sectores y traslados de la fuerza de trabajo. Creo que esta es una explicación insuficiente y sería deseable una investigación de estos períodos de desarrollo forzado la influencia de los

[38] Si el total de medios de producción por producto variara, carecería de significado el posible aumento del excedente tras la reasignación. En realidad, si aceptáramos el supuesto de su variación nada de este artículo tendría sentido.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

cambios forzados –a su vez- entre empresas y procesos de un mismo sector. Esta sería la explicación *esrafiana* –no atribuible a Sraffa sino al desarrollo de su obra, claro está- de las consecuencias de la planificación forzada, especialmente en la Unión Soviética tras la II Guerra Mundial. Sólo sería, desde luego, una parte de la explicación, pero que completaría la explicación tradicional (traspaso entre sectores).

III – Sin mercancía-patrón (II)

Pero para una economía real estas reasignaciones no serían posibles ni deseables, pero sí se puede mantener el criterio de reasignaciones con restricciones. Veamos un ejemplo. Partimos de los mismo datos iniciales, por lo que no los repetimos. Ahora en cambio suponemos que la variación del trabajo entre bienes y servicios sólo puede ser para el período considerado (por ejemplo, un quinquenio) de un porcentaje a establecer por el organismo planificador. Supongamos que la reasignación del trabajo para los diferentes bienes y servicios (no para procesos) es como máximo de un 20% para el período mencionado. El resultado de la optimización –junto con el resto de las condiciones que luego mencionamos- nos da la siguiente distribución:

L = inputs de trabajo			Ll
0,300	0,200	0,500	1,000

Lp = inputs de trabajo			Lpl
0,240	0,240	0,520	1,000

(Lp-L)/L		
-20%	20%	4%

Se comprueba, como en el caso anterior, que la optimización del excedente busca pasar el trabajo del bien que se obtiene con menos excedente relativo (el primero, que pasa de 0,300 a 0,240, una disminución de un 20%) -que en realidad es cero- al bien que da más (el segundo, aumentando de 0,200 a 0,240, un 20%). En cuanto al tercero, el excedente es positivo pero mucho menor que lo que da el segundo bien, por lo que el aumento sobre el requerimiento de trabajo es pequeño (de 0,500 a 0,520, un 4%). Damos el excedente de los datos originales:

Yl-Xl
0,0
165,0
70,0

Pero además de la restricción impuesta a los inputs de trabajo, aquí hemos hecho otro tanto con los medios de producción, permitiendo una variación máxima por arriba y por debajo de un 20%. La reasignación entre procesos ha producido la matriz ***X***p de medios (reasignados) junto con la matriz ***T*** de estas reasignaciones:

T		
0,642	0,333	0,025
0,320	0,667	0,013
0,038	0,000	0,962
1,000	1,000	1,000

Xp = XT			XpI	XpI-XI
75,3	63,3	41,4	180,0	0,000
118,5	123,3	43,1	285,0	0,000
94,2	120,0	195,8	410,0	0,000

Damos ahora la matriz de productos finales ***Y***p=**k*X***p junto con la de medios reasignados ***X***p y junto con el excedente.

Yp = K⊗Xp			YpI
66,9	57,0	56,9	180,8
133,3	197,3	124,0	454,7
188,3	32,0	313,3	533,7

Xp = XT			XpI
75,3	63,3	41,4	180,0
118,5	123,3	43,1	285,0
94,2	120,0	195,8	410,0

YpI-XI
0,8
169,7
123,7

Y los excedentes son:

Ep = Lp(Yp-Xp)I / LpXpI = **32,40** %

Ee = L(Yp-Xp)I / LXpI = 30,38%

E = L(Y-X)I / LXI = 21,52%

Al igual que el caso anterior, separamos el efecto de la reasignación entre procesos para los mismos trabajadores de cada uno de esos procesos (de 21,52% originales a 30,38%) del efecto de la reasignación del trabajo para los distintos bienes y servicios (de 30,38% a 32,40%). Vemos que la parte mayor de la responsabilidad del aumento del excedente se debe a la reasignación entre procesos. Si esta conclusión se mantuviera con datos que reflejaran la realidad, ello rompería un tópico neoclásico que achaca a la reasignación del trabajo los aumentos de productividad. Se demostraría –como aquí se hace- que los mayores aumentos de productividad (aumento del excedente relativo) se debería a la reasignación de procesos en la obtención del mismo bien o servicio. Resumimos en términos de programación lineal las condiciones y resultados anteriores:

- datos iniciales: ***Y***, ***X***, ***L***
- función a maximizar: $Ep = \dfrac{Lp[Yp - Xp]I}{LpXpI}$
- variables: ***T*** (***n***x***n*** variables) y **L**p (***n*** variables)
- restricciones:

1) $XpI = XI$ (***n*** restricciones)
2) $Xp \geq 0$ (***n***x***n*** restricciones)
3) $IT = I$ (***n*** restricciones)
4) $LpI = 1$ (**1** restricción)
5) $0{,}8 \times L \leq Lp \leq 1{,}2 \times L$ (**2**x***n*** restricciones)
6) $0{,}8 \times X \leq Xp \leq 1{,}2 \times X$ (**2**x***n*** restricciones)
7) $Y = k \otimes X$ (de la cual se obtiene ***k*** por definición)
8) $Yp = k \otimes Xp$ (de la cual se obtiene ***Y***p)
9) $0{,}8 \times Y \leq Yp \leq 1{,}2 \times Y$ (**2**x***n*** restricciones)
10) $T \geq 0$ (***n***x***n*** restricciones)
11) $Xp = XT$ (***n***x***n*** restricciones)

La restricción tercera (**I*T*=I**) la entendemos optativa porque, en contra del sentido común quizá, no es necesario que los elementos de la matriz ***T*** sean positivos a pesar de que la entendemos como matriz de ponderaciones (por ser igual a **1** la suma de sus columnas). No hay problema porque estamos imponiendo la restricción de que los medios calculados tras la reasignación sean mayores o iguales a cero (***X***p=***XT***). Aunque no vamos a repetir todos los datos sí vamos a dar el resultado:

Ep = Lp(Yp-Xp)I / LpXpI =	**33,40%**
Ee = L(Yp-Xp)I / LXpI =	31,37%
E = L(Y-X)I / LXI =	21,52%

Que como vemos el excedente con eliminación de esta restricción hace aumentar el excedente relativo (de 31,37% a 33,40%). Y, sin embargo, tan pequeña variación supone una variación importe en las matrices de medios y productos. Damos aquí la resultante con ***T*** sin restricción y de ***T*** con restricción:

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

medios y productos calculados sin restricción de **T**

Yp = K⊗Xp			Ypl		Xp = XT			Xpl		Ypl-Xl
64,0	56,8	61,7	182,5		72,0	63,1	44,9	180,0		2,5
129,3	199,7	130,0	459,1		114,9	124,8	45,2	285,0		174,1
205,7	32,0	299,5	537,1		102,8	120,0	187,2	410,0		127,1

medios y productos calculados con **T**≥**0**

Yp = K⊗Xp			Ypl		Xp = XT			Xpl		Ypl-Xl
66,9	57,0	56,9	180,8		75,3	63,3	41,4	180,0		0,8
133,3	197,3	124,0	454,7		118,5	123,3	43,1	285,0		169,7
188,3	32,0	313,3	533,7		94,2	120,0	195,8	410,0		123,7

III – Sin mercancía-patrón (IV)

Vamos ahora a desarrollar el criterio de producción de los ejemplos anteriores. Seguimos con una función de producción donde los inputs de trabajo es la variable dependiente y depende del producto final (***Y***) y de los medios empleados (***X***). Sin embargo vamos a introducir una novedad que *dulcifique* esta relación que resulta ciertamente explosiva. Lo que hacemos es depender el trabajo, no tan sólo del producto de bienes finales y medios, sino del *logaritmo* de ese producto. Es decir, la función de producción sería:

(235) $$Lp_{1xn} = (H_{nx1} \otimes (\ln(Y^{a}_{nxn} \otimes X^{b}_{nxn}))I_{nx1})^{T}$$

Ya hemos justificado que hacer proporcional (aquí al logaritmo) el input de trabajo $\boldsymbol{l}p_i$ de la suma (otra variación) del producto del bien final $\boldsymbol{y}_{ij}$ por el medio $\boldsymbol{x}_{ij}$ significa económicamente que trabajo y medio de producción son complementarios y no sustitutivos, paradigma este último de la economía neoclásica. Aquí hemos considerado además que el vector ***H*** ***n*x1** es una variable a determinar en el proceso de optimización y no un dato. Por otro lado, los exponente $\boldsymbol{a}_{ij}$ y $\boldsymbol{b}_{ij}$ tienen un significado cercano a los exponentes de las variables trabajo y medios de producción en las funciones neoclásicas de producción de elasticidad constante, pero no el mismo. Si se deriva $\boldsymbol{L}p_i$ respecto a $\boldsymbol{y}_{ij}$ y respecto a $\boldsymbol{x}_{ij}$ sale:

(236) $$a_{ij} = \frac{y_{ij}}{h_i} \times \frac{dlp_i}{dy_{ij}}$$

(237) $$b_{ij} = \frac{x_{ij}}{h_i} \times \frac{dlp_i}{dx_{ij}}$$

Aquí -y por analogía con las funciones de producción neoclásica- se puede hacer el supuesto (o no) de que $\boldsymbol{a}_{ij}+\boldsymbol{b}_{ij} = \boldsymbol{1}$ para todo ***i***, ***j*** de **1** a ***n***. En este caso y teniendo en cuenta (236) y (237), se cumpliría que:

(238) $$dlp_i = h_i \times \left[\left[\frac{dy_{ij}}{y_{ij}} \right]^{-1} + \left[\frac{dx_{ij}}{x_{ij}} \right]^{-1} \right]^{-1}$$

Si la relación entre las variables fuera discreta (Sraffa) en lugar de continua, en lugar de una ecuación diferencial en (238) tendríamos una ecuación en diferencias finitas. El modelo puede tomar los ***n***x***n*** ***a***$_{ij}$ y los ***n***x***n*** ***b***$_{ij}$ como datos iniciales o como variables a determinar (ajustar econométricamente). Con los datos iniciales de los anteriores ejemplos obtendríamos el producto ***Y***⊗***X*** tal como:

Y⊗X

7200	2250	2200
16200	25000	4600
7200	6000	64000

Damos ahora las matrices de la suma de los logaritmos de estos productos, el vector de reasignación ***H*** y el vector final de inputs de trabajo resultante ***L***p. Aquí, en este ejemplo, se ha supuesto que ***a***$_{ij}$=***b***$_{ij}$=**1** para todos los **i**, **j** desde **1** a ***n***.

ln(Y⊗X)			M=(ln(Y⊗X))I	H	H⊗M	Lp=H⊗M
8,88	7,72	7,70	24,30	0,270	6,57	0,240
9,69	10,13	8,43	28,25	0,233	6,57	0,240
8,88	8,70	11,07	28,65	0,497	14,24	0,520
				1,000	27,4	1,000

Se ha supuesto además las restricciones de **I*H*=1** y ***L*pI=1** dado que partimos también del supuesto *esrafiano* de que la suma de los inputs de trabajo son un numerario (***L*I**=**1**). Damos ahora la matriz de reasignación ***T*** y la matriz ***X***p=***XT*** resultante de esa reasignación, al que añadimos la restricción de que ***X*pI**=***X*I**, es decir, que el total de medios de producción por bien o servicio sea el mismo antes de la reasignación como después:

T			TI	Xp = XT			XpI	XpI-XI
1,023	0,198	-0,220	1,000	88,1	59,9	32,0	180,0	0,000
-0,304	1,002	0,301	1,000	96,0	141,0	48,0	285,0	0,000
0,281	-0,200	0,919	1,000	72,0	122,2	215,8	410,0	0,000
1,000	1,000	1,000						

Y el resultado de los productos finales tras la optimización está dado por ***Y***p, así como el excedente resultante (***Y*pI-*X*I**). Lo damos a continuación:

Yp = K⊗Xp			YpI
78,3	53,9	44,0	176,2
108,0	225,6	138,0	471,6
144,0	32,6	345,2	521,8

Xp = XT			XpI
88,1	59,9	32,0	180,0
96,0	141,0	48,0	285,0
72,0	122,2	215,8	410,0

YpI-XI
-3,8
186,6
111,8

Como es habitual, la función de optimización es el excedente dado por la función:

(239) $$Ep = \frac{Lp[Yp - Xp]I}{LpXpI}$$

Y este excedente, junto con el original ***E*** fruto de los datos originales ***L***, ***Y*** y ***X***, y el excedente ***E***e obtenido por los medios reasignados ***X***p y los productos obtenidos ***Y***p, pero con los inputs de trabajo originales ***L***, lo expresamos de la forma:

Ep = Lp(Yp-Xp)I / LpXpI =	31,41%
Ee = L(Yp-Xp)I / LXpI =	29,15%
E = L(Y-X)I / LXI =	21,52%

Se ha conservado la función de rendimientos constantes entre los productos finales ***Y*** y sus medios de acuerdo con la función ***Y***=***k***⊗***X***, con lo que los productos finales ***Y***p resultante es ***Y***p=***k***⊗***X***p. También se ha restringido, como el ejemplo anterior, a una variación del 20% por arriba y debajo los inputs de trabajo ***L***p, productos finales ***Y***p y medios ***X***p. Visto la función objetivo, damos sintetizadas las restricciones:

1) $XpI = XI$ (***n*** restricciones)

2) $Xp \geq 0$ (***n***x***n*** restricciones)

3) $LpI = 1$ (**1** restricción)

4) $0{,}8 \times L \leq Lp \leq 1{,}2 \times L$ (**2**x***n*** restricciones)

5) $0{,}8 \times X \leq Xp \leq 1{,}2 \times X$ (**2**x***n*** restricciones)

6) $0{,}8 \times Y \leq Yp \leq 1{,}2 \times Y$ (**2**x***n*** restricciones)

7) $Y = k \otimes X$ (de la cual se obtiene ***k*** por definición)

8) $Yp = k \otimes Xp$ (de la cual se obtiene ***Y***p)

9 $IT = I$ (***n*** restricciones)

10) $IH = 1$ (**1** restricción)

11) $Xp = XT$ (***n***x***n*** restricciones)

12) $A + B = I$ (optativa) (***n***x***n*** restricciones)

Si se optara además por la restricción ***A***+***B***=**I** los resultados del ejemplo anterior serían otros, con unos valores para el excedente menores que los aquí calculados.

Apéndice I

Veamos ahora una posible alternativa a la interpretación dada en el artículo al epígrafe 63 del libro de Sraffa. Habla el economista italiano de encontrar una razón-patrón ***R*** para la producción conjunta que corresponda "*con el mínimo valor posible*". Sraffa trae a colación su famosa fórmula ***r***=(**1**-***w***)***R***, con ***r*** como tasa de ganancia y ***w*** como tasa de salarios. Pero la alternativa que presentamos exige ir a la conclusión formal que representa la razón-patrón, tanto en la producción simple como en la conjunta. Esta razón representa y es una medida del excedente, objeto y razón de ser de la obra *Producción de mercancías por medio de mercancías.* Por ello podríamos decir que esta formulación de Sraffa sería equivalente a plantear un problema de programación lineal. Diríamos que la mercancía-patrón se construye como el mínimo de ***R***, siendo $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{X})$ y estando sujeto a la restricción $\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{Z}>\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{X}^{T}$, siendo ***Z*** la matriz ***n***x***n*** *diagonal* de sólo ***n*** elementos, ***Q*** el vector vertical[39] de los ***n*** los multiplicadores y $\boldsymbol{g}_{m}$ la tasa máxima de ganancia. Esta interpretación del epígrafe 63 exige dos matizaciones. La primera es que no debiera hablarse –como lo hace Sraffa- de razón-patrón para la producción conjunta y sólo de tasa máxima de ganancia. Ambas no tienen por qué coincidir en este modelo de producción. Si lo hace en la simple es por la posibilidad de aplicar Perron-Frobenius. En la conjunta no es posible, al menos directamente, es decir, al menos que transformemos la producción conjunta en un equivalente a la simple. La segunda es que vamos a reformular la ecuación de la razón-patrón –con la salvedad además antes mencionada- a un excedente relativo en el que todos los bienes y servicios se suman hasta encontrar un excedente general del sistema. La razón de ello es la necesidad que existe -desde el punto de vista de la programación lineal- de buscar una función objetivo que sea un ¡escalar! La cosa no es complicada porque tenemos ese escalar en función de las ***n*** $\boldsymbol{z}_i$ mercancías virtuales cuyos valores queremos encontrar. Esta función es $\boldsymbol{g}_{m}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{X})\mathbf{I}\text{x}(\boldsymbol{L}\mathbf{I})^{-1}$ y puede verse su obtención en el apéndice II de este artículo (ecuación (9)). Planteamos ahora las ecuaciones de definición del sistema y las que resultan de hacer cero la tasa de salarios y la tasa de ganancia:

(1) $$P_{1xn}Y_{nxn} = wL_{1xn} + (1+g)P_{1xn}X_{nxn}$$

(2) $$(1+g_m)^{-1}PY = PX$$

(3) $$PY = w_m L + PX$$

[39] Por ello **Q**^{T}, que es la traspuesta de **Q,** será el vector horizontal de los **n** multiplicadores.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(4) $$Q^T_{1xn} Z_{nxn} >= Q^T_{1xn} X^T_{nxn}$$

(5) $$Z > 0$$

De la las ecuaciones (1) y (2) salen los precios tal y como hemos visto en el cuerpo principal de este trabajo:

(6) $$P = \frac{w_m}{g_m} \times LX^{-1}$$

De (2) y (4) establecemos la siguiente igualdad:

(7) $$\boxed{PX = Q^T X^T}$$

Si ahora sustituimos los precios de (6) en (7) y tras *post-multiplicar* por $(\boldsymbol{X}^{-1})^T$ la ecuación resultante quedaría:

(8) $$Q^T = \frac{w_m}{g_m} L(X^{-1})^T$$

Y haciendo lo propio con (8) y (6) en (4), obtenemos la ecuación matricial implícita en ***Z***:

(9) $$L(X^{-1})^T Z >= L$$

Y el problema queda planteado como el de encontrar ***n*** $\boldsymbol{z}_i$ en ***Z*** tales que hagan mínimo $\mathbf{g}_m=\boldsymbol{LX}^{-1}(\boldsymbol{Z}\text{-}\boldsymbol{X})\mathbf{I}\times(\boldsymbol{L}\mathbf{I})^{-1}$, aunque positivo, sujeto a que $\boldsymbol{Z}>\mathbf{0}$ y que $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{X}^{-1})^T\boldsymbol{Z}>=\boldsymbol{L}$. Dado que ***Z*** es diagonal, en la ecuación matricial anterior puede despejarse los elementos de ***Z*** de la manera:

(10) $$\boxed{z_{jj} \geq \frac{l_j}{\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{x}_{ji}} \qquad \forall j = 1 \quad a \quad j = n}$$

siendo los $\boldsymbol{x}_{ji}$ con sombreros los elementos transpuestos de la inversa de ***X***. Para facilitar la comprensión de todo esto, exponemos el desarrollo matricial de la función objetivo:

(11)
$$\boxed{g_m = \left[\frac{l_1}{\sum_{i=1}^{n} l_i}, \ldots, \frac{l_n}{\sum_{i=1}^{n} l_i}\right] \times \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \ldots & \hat{x}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{n1} & \ldots & \hat{x}_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_{11}-x_{11} & -x_{12} & \ldots & -x_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -x_{n1} & \ldots & -x_{n(n-1)} & z_{nn}-x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Apéndice II

Una forma de abordar la estimación de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$ es como sigue. Por un lado tenemos la ecuación de precios derivada de la definición del sistema:

(1) $$P = LW(I_d + G)\left[Y - X(I+G)\right]^{-1}$$

Por otro, de la ecuación de precios derivada de hacer cero las tasas de salario también en la ecuación de definición del sistema y de esta misma ecuación (70), sale:

(2) $$P = LW(I_d + G)\left[(G_m - G)^{-1} X^{-1}\right]$$

A simple vista se observa que puede conjeturarse una relación lineal entre la resultante de la matriz entre corchetes de (1) y la de (2), y por ello se puede establecer la siguiente relación:

(3) $$\left[Y - X(I_d + G)\right]^{-1} = \left[(G_m - G)^{-1} X^{-1}\right] F$$

siendo ***F*** una matriz *diagonal*[40] cuyos elementos permiten mantener la proporcionalidad entre sendas matrices entre corchetes de (3). Si ahora hacemos igual a cero las tasas de ganancia ***G***, la nueva relación de (3) queda:

(4) $$\left[Y - X\right]^{-1} = G_m^{-1} X^{-1} F$$

Y pre-multiplicando (4) por $\boldsymbol{G}_m$ y post-multiplicando por (***Y***-***X***) sale:

(5) $$G_m = X^{-1} F(Y - X)$$

Y a partir de ***F*** se puede encontrar otra matriz[41] ***H***=*f* (***F***) tal que:

(6) $$\boxed{G_m = HX^{-1}(Y - X)}$$

La ecuación (6) nos dice que las tasas máximas de ganancia son proporcionales a los excedentes relativos ($\boldsymbol{X}^{-1}$(***Y***-***X***)). No es necesario calcular ***H*** ni ***F***, porque de lo que se trataba es de demostrar la proporcionalidad entre excedente y tasa máxima de ganancia.

A conclusiones semejantes –aunque no exactamente iguales por lo que se verá- se llega si partimos de tasas unitarias de salarios y ganancias, pero con

[40] Si la necesitáramos NO diagonal no habría problema con suponerla como tal.

[41] Al igualar (5) con (6) sale que $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{Y}\text{-}\mathbf{X})=\mathbf{H}\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{Y}\text{-}\mathbf{X})$, que tras pos-multiplicar por la inversa de **Y**-**X** y despejar **H**, se obtiene: $\mathbf{H}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{X}$.

algo más de precisión en la obtención de la tasa máxima de ganancia. Sean las ecuaciones de definición del sistema:

(7) $$PY = wL + (1+g)PX$$

(8.1) $$PY = (1+g_m)PX$$

(8.2) $$PY = w_m L + PX$$

De (8.1) y de (8.2) se obtiene el vector de precios $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{w}_m \boldsymbol{g}_m^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}$, que sustituida en (8.2) nos da la ecuación $\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})$ y que pos-multiplicada por el vector vertical de unos **I** y despejado el escalar de la tasa máxima de ganancia queda:

(9) $$g_m = \frac{LX^{-1}[Y-X]I}{LI}$$

Puede comprobarse en (9) que la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ *sólo* depende de las variables físicas del sistema (trabajo, medios y productos finales) y no de las monetarias (precios, ganancias y salarios). Aquí -a diferencia del caso anterior- la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ es directamente calculable.

Vamos ahora a demostrar que también –además de las ganancias– los salarios *máximos* sólo dependen de las variables físicas (trabajo, medios y productos finales) y no de las variables monetarias del sistema. Para ello planteamos estos sistemas de ecuaciones:

(10) $$P_{1xn}Y_{nxn} = (1+g)[wL_{1xn} + P_{1xn}X_{nxn}]$$

(11) $$PY = w_m L + PX$$

(12) $$PYI - PXI = 1$$

donde la (10) define el sistema *esrafiano* de producción conjunta sin diferenciación entre bienes[42]; la (11) es la resultante de hacer en (10) cero la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$, y la (12) es un numerario que, además, es el empleado por Sraffa en la producción simple. Pues bien, del conjunto de ecuaciones (11) y (12) obtenemos sin apenas manipulaciones algebraicas:

(13) $$w_m = \frac{1}{LI}$$

Si hubiéramos partido de un sistema análogo al definido por (10), (11) y (12), pero con ***n*** tasas de salarios $\boldsymbol{W}_m$ y ***n*** tasas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$ (matrices diagonales) en lugar de (13) hubiéramos obtenido:

---

[42] Si se hace con diferenciación de bienes el resultado es el mismo con tal de tomar como numerarios la expresión $\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N\boldsymbol{I}+\boldsymbol{PYI}-\boldsymbol{PXI}=1$

(14) $$LW_m = 1$$

donde vemos tanto en (13) como en (14) que los salarios máximos no dependen de ninguna variable monetaria (precios, salarios y ganancias).

cuadro 1: cálculo de los multiplicadores, la razón-patrón
y la mercancía-patrón mediante programación lineal

Y = productos finales

450	0	0	450
0	21	0	21
0	0	60	60

X = medios de producción

186	54	30	270
12	6	3	21
9	6	15	30

L = inputs de trabajo

			LI
0,300	0,200	0,500	1,000

función objetivo

LQ = 1,000

Q = multiplicadores

0,9679	0	0
0	1,6949	0
0	0	0,7413

				LQ
LQ =	0,2904	0,3390	0,3706	1,000

autovalor = 0,8436

YQ = mercancía-patrón

435,57	0,00	0,00	435,57
0,00	35,59	0,00	35,59
0,00	0,00	44,48	44,48

XQ = mercancía-patrón

180,03	91,53	22,24	293,80
11,62	10,17	2,22	24,01
8,71	10,17	11,12	30,00

excedentes relativos

(Y-X)Q/XQ
48,254%
48,254%
48,254%

Cuadro 1. La mercancía-patrón (***YQ*** y ***XQ***) obtenida en el presente ejemplo parte de los datos del libro de Pasinetti *Lecciones de teoría de la producción* (pág. 189 edición española de 1983, primera versión en italiano de 1975).

También se ha obtenido el mismo autovalor (**0,8436**) y la misma tasa de ganancia (4**8,254**%) y la misma mercancía-patrón que en la obra de Pasinetti. La diferencia es que aquí se ha hecho con programación lineal a partir de una hoja de cálculo Excel y sin aplicar Perron-Frobenius (aunque es posible que el camino emprendido por el programa sea un algoritmo equivalente al cálculo por el teorema). Se ha tomado como función objetivo los inputs de trabajo (***LQ***=**1**). Se ha partido como únicas variables a cambiar los multiplicadores (***Q***). Las restricciones han sido: 1) que los multiplicadores sean mayores o iguales a cero, 2) que los inputs de trabajo de la mercancía-patrón actúen como numerario (***LQ***=**1**), 3) que los excedentes relativos relativos sean iguales entre sí y mayores o iguales a cero.

cuadro 2: cálculo de los multiplicadores, la razón-patrón
y la mercancía-patrón mediante programación lineal
en la producción simple

Y = productos finales

180	0	0	180
0	450	0	450
0	0	480	480

X = medios de producción

90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

L = inputs de trabajo

			LI
0,1875	0,3125	0,5000	1,000

función objetivo

LQ = 1,000

Q = multiplicadores

1,3333	0	0
0	0,800	0
0	0	1,000
1,3333	0,800	1,000

LQ =	0,250	0,250	0,500	1,000

autovalor = 0,8436

Excedente* = L(Y-X)Q/LXQ = 19,62%

YQ = mercancía-patrón

240,0	0,0	0,0	240,0
0,0	360,0	0,0	360,0
0,0	0,0	480,0	480,0

(Y-X)Q/XQ

20,00%
20,00%
20,00%

XQ = mercancía-patrón

120,0	40,0	40,0	200,0
160,0	100,0	40,0	300,0

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

80,0	120,0	200,0	400,0

$$g_m = \frac{Q^T Y^T I}{Q^T X^T I} - 1 = \quad 20{,}00\%$$

Cuadro 2. En este modelo, surgido a partir de la producción simple esrafiana, parte de las ecuaciones ***PY***=(**1**+***g***m)***PX***, ***uYQ***=***XQ*** y (**1**+***g***m)**-1**=***u***, donde ***Y*** es diagonal, ***g***m es la tasa máxima de ganancia, ***u*** sería el autovalor obtenido por el teorema de Perron-Frobenius que aquí no se aplica y ***Q*** un vector vertical de multiplicadores que hay que obtener mediante programación lineal, renunciando también a su obtención mediante el teorema mencionado. ***Y*** y ***X*** son, como siempre, la matriz de productos finales y la de medios, respectivamente. Para llegar la tasa máxima de ganancia (20%) se han establecido las igualdades $(\mathbf{1}+g_m)^{-1}PY=Q^TY^T$ y la $PX=Q^TX^T$. Entre ambas se han eliminado los precios y se obtiene:

$$g_m = \frac{Q^T Y^T I}{Q^T X^T I} - 1$$

donde **I** es el vector vertical de unos. Se ha convertido esta expresión en la función objetivo, es decir, se busca la tasa máxima de ganancia g_m. Los medios ***X*** y los productos ***Y*** son datos, y las variables que utiliza el sistema son los ***n*** multiplicadores q_i que están recogidos en el vector vertical ***Q***. Como restricciones tenemos la relación para cada mercancía entre el producto-patrón (***YQ***) y el medio-patrón (***XQ***), la exigencia de que los multiplicadores q_i sean mayores o iguales que cero y, por último, que los inputs-trabajo calculados tras la mercancía-patrón (***LQ***) sean de nuevo un numerario (***LQ***=**1**), al igual que se había utilizado como numerario los inputs de trabajo antes del cálculo de la mercancía-patrón (***L*I**=**1**). Puede comprobarse que los resultados del cálculo de la mercancía-patrón (***YQ*** y ***XQ***) son los mismos que los obtenidos por Josep M. Vegara en su libro *Economía política y modelos multisectoriales* (edit. Tecnos, 1979, pág. 118). También es el mismo el autovalor (0,8333) y los multiplicadores (***Q***=1,333;0,800;1,000), como no podía ser de otra manera, puesto que la razón-patrón (aplicando Perron-Frobenius) en la producción simple coincide con la tasa máxima de ganancia (g_m). Veremos que eso ya no ocurre con la producción conjunta. Parece paradójico que la tasa máxima de ganancia (20%) supere al valor del excedente (19,62%), pero no lo es si tenemos en cuenta que este último viene medido en horas de trabajo (***L***), con lo que discrepará de la tasa máxima según los valores sectoriales de estos

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

inputs de trabajo y que tienen diferente ponderación en el conjunto (***L*** se ha tomado como numerario, es decir, se ha hecho ***L*I**=**1**, como ya se ha señalado).

cuadro 3: cálculo de los multiplicadores, la razón-patrón y la mercancía-patrón mediante programación lineal

Y = productos finales

80	45	55	180
135	200	115	450
120	40	320	480

X = medios de producción

90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

S

0,8197	0	0		
0	1,4012	0		
0	0	0,7791		
			3,000	
				0,895

L = inputs de trabajo			LI
0,1875	0,3125	0,5000	1,000

	Q = multiplicadores			Q	
	0,068	0	0	0,068	
	0	1,191	0	1,191	
	0	0	1,230	1,230	
tr(Q)=	0,068	1,191	1,230	2,489	
					0,100

autovalor = 0,7433

YQ = mercancía-patrón

5,46	53,60	67,64	126,71
9,22	238,24	141,44	388,90
8,20	47,65	393,56	449,41

L Q= inputs de trabajo			LQI
0,013	0,372	0,615	**1,000**

SXQ = mercancía-patrón

5,04	48,82	40,32	94,18
11,48	208,65	68,93	289,06
3,19	139,21	191,64	334,04

YQ/SXQ	excedente (Y-SX)Q/SXQ
1,345	34,537%
1,345	34,537%
1,345	34,538%

tr(Q)tr(Y)inv(Y)X

-42,47	289,06	161,69	408,3

tr(Q)tr(X)S

94,18	289,06	334,04	717,3

$$g_m = \frac{Q^T Y^T I}{Q^T X^T S\, I} - 1 = 34{,}54\%$$

excedente(pre) = L*(Y-X)I / LXI = 26,41%

Cuadro 3. En este tercer cuadro hemos arribado a las arenas de la producción conjunta, cosa que puede comprobarse en la matriz de producción conjunta ***Y***, donde todos sus elementos tienen un valor distinto de cero, a diferencia de la matriz de productos del cuadro 2, donde sólo había elementos en la diagonal (producción simple). No es necesario que todos los elementos de esta matriz sean positivos para estar en la conjunta; es más, con tal de que hubiera uno distinto de cero fuera de la diagonal principal ya estaríamos en esta manera de describir una economía que es, por cierto, mucho más realista que la producción simple. El problema de la producción conjunta es que ya no podemos aplicar Perron-Frobenius porque no hay garantía que la matriz de requerimientos $\boldsymbol{XY^{-1}}$ sea positiva. Por eso nos hemos apartado algo de la manera de proceder de Sraffa (pero no mucho, como se puede comprobar leyendo el texto principal) y nos valemos ahora de la técnica de la programación lineal. Como es sabido, para el uso de esta técnica se necesita plasmar los problemas formalmente con dos características: que las relaciones de las variables involucradas en el problema sean lineales y que la función objetivo también lo sea. Como veremos en el cuadro siguiente, si intentáramos ahora maximizar la función objetivo (estamos tomando la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$), nos encontraríamos, bien con multiplicadores negativos, bien con tasas de ganancia máxima distintas según bienes y servicios (mercancías, *commodities*, en lenguaje *esrafiano*). Para intentar solucionar el problema hemos introducido una matriz diagonal de coeficientes ***S*** premultiplicando a la ecuación que describe la mercancía-patrón, es decir, hemos hecho que $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{SXQ}$. Con ello hemos multiplicado el número de variables por 2 y ya tenemos los ***n*** multiplicadores del vector ***Q*** y estos ***n*** de la matriz diagonal ***S***. Para ser más exactos, hemos introducido ***n*-1** variables nuevas porque imponemos la condición de que la suma de los elementos de ***S*** valgan **1**. Mantenemos el coeficiente ***u*** que multiplica a ***YQ***, aunque ahora ya no puede obtenerse su valor con Perron-Frobenius –como queda dicho- y es una variable relacionada con la tasa máxima de ganancia mediante la ecuación $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)^{-1}=\boldsymbol{u}$. Procedemos como antes a partir de las ecuaciones $\boldsymbol{PY}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)\boldsymbol{PX}$ y $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{SXQ}$, e igualamos miembro a miembro ambas, de tal forma que obtenemos ahora que $\boldsymbol{PY}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Y}^T$ y $\boldsymbol{PX}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}^T$. Y ahora, junto con la mencionada $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)^{-1}=\boldsymbol{u}$, eliminamos precios y obtenemos:

$$\boxed{g_m = \frac{Q^T Y^T I}{Q^T X^T SI} - 1}$$

La única –pero muy importante- diferencia con ecuación análoga del cuadro 2 es que ahora la matriz traspuesta de los medios de producción ($\boldsymbol{X}^{\mathbf{T}}$) está pos-multiplicada por esta matriz de coeficientes ***S*** (al ser ***S*** diagonal ocurre que $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathbf{T}}$). Hechos estos supuestos y consideraciones hemos aplicado la técnica de la programación lineal tomando como función objetivo la ecuación anterior de la tasa máxima de ganancia ($\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$), tomando como variables los ***n*** multiplicadores $\boldsymbol{q}_{\mathrm{i}}$ del vector vertical ***Q*** y los ***n*** elementos de la diagonal ***S***. Las restricciones son las mismas que las del cuadro 2: a) que se cumpla que sean iguales por mercancías (filas) la relación entre ***YQ*** y –en este caso particular- ***SXQ***, b) que los n multiplicadores $\boldsymbol{q}_{\mathrm{i}}$ sean positivos; c) que también lo sean los ***n*** coeficientes de ***S***, d) que los nuevos inputs de trabajo que surgen de la mercancía-patrón valgan también 1, es decir, que ***LQ***=**1**. El resultado es que la tasa máxima de ganancia es 34,54%, los multiplicadores valen 0,068;1,191;1,230, los coeficientes que nos han auxiliado para evitar multiplicadores negativos 0,8197;1,4012;0,7791 y los inputs de trabajo correspondientes a la mercancía-patrón son 0,013;0,372;0,615. No hay que pensar que sea esta la única solución, sino que son posibles infinitas soluciones porque cualquier combinación de datos de ***S*** que dé lugar a multiplicadores positivos que cumplan con la condición a) son soluciones del sistema. Incluso podríamos partir de valores negativos de ***S*** (al menos de algunos) con tal de que den soluciones positivas de los multiplicadores e iguales relaciones entre ***YQ*** y **SXQ** por cada mercancía (por filas). Se ha dejado el nombre de autovalor al valor calculado (0,7433) para facilitar la comparación con la producción simple aunque, en este caso de producción conjunta, no tiene sentido llamarlo así porque no ha surgido de aplicar Perron-Frobenius (y ello por dos motivos: porque estamos en la producción conjunta y porque el método de cálculo es la programación lineal). Por último, no se ha conseguido que en el cálculo se respete la restricción $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ por las limitaciones que tiene un ordenador de mesa como el utilizado, pero con ordenadores más potentes se hubiera conseguido. La mayor dificultad de esta restricción está en el cálculo de la matriz inversa $\boldsymbol{Y}^{\mathbf{-1}}$.

cuadro 4: cálculo de los multiplicadores, la razón-patrón
y la mercancía-patrón mediante programación lineal

Y = productos finales

80	45	55	180
135	200	115	450
120	40	320	480

X = medios de producción

90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

S

0,629	0	0		
0	1,118	0		
0	0	0,802		
0,629	1,118	0,802	2,549	
				0,564

L = inputs de trabajo

			LI
0,1875	0,3125	0,5000	1,000

Q = multiplicadores

				Q	
	0,332	0	0	0,332	
	0	0,170	0	0,170	
	0	0	1,769	1,769	
tr(Q)=	0,332	0,170	1,769	2,271	
					0,100

autovalor = 0,5224

YQ = mercancía-patrón

26,59	7,65	97,30	131,54
44,87	33,99	203,45	282,31
39,89	6,80	566,12	612,81

L Q= inputs de trabajo

			LQI
0,062	0,053	0,885	1,000

SXQ = mercancía-patrón

				YQ/SXQ	excedente (Y-SX)Q/SXQ
18,83	5,35	44,54	68,72	1,914	91,424%
44,60	23,75	79,13	147,48	1,914	91,424%
15,99	20,44	283,70	320,13	1,914	91,424%

$$g_m = \frac{Q^T Y^T I}{Q^T X^T S I} - 1 =$$ 91,42%

excedente (post)
L(Y-SX)Q / SXQ
67,81%

tr(Q)tr(Y)inv(Y)X

-69,77	318,54	287,56	536,33

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

tr(Q)tr(X)S			excedente (pre)
68,72 147,48 320,13	-536,33		L(Y-X)I / LXI
			26,41%
función objetivo =	0,00008		

Cuadro 4. En este cuarto cuadro se ha cambiado la función objetivo. Aquí se ha impuesto como objetivo que se cumpla la ecuación $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}^T$, ecuación que ha surgido de eliminar los precios entre las ecuaciones $\boldsymbol{PY}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Y}^T$ y $\boldsymbol{PX}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}^T$. Ambas surgen a su vez de igualar miembro a miembro $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)^{-1}\boldsymbol{PY}=\boldsymbol{PX}$, $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{XQ}$ y $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)^{-1}=\boldsymbol{u}$. Esta manera de proceder ya se ha visto en el texto del artículo (ver ecuación la ecuación (16.3)) para el cálculo de la mercancía-patrón cuando no estamos en la producción simple y no se puede, por tanto, aplicar Perron-Frobenius. La función objetivo, según esto, surge de una pequeña maniobra algebraica y se trata de hacer cero $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}^T$, es decir, el programa busca, de todas las soluciones factibles (dadas por las restricciones), las que hagan cero la diferencia anterior. Las variables a *tocar* son, como es habitual ya en este trabajo, los $\boldsymbol{n}$ multiplicadores de $\boldsymbol{Q}$ y los $\boldsymbol{n}$ coeficientes de ponderación $\boldsymbol{S}$. Las restricciones son: 1) que $\boldsymbol{LQ}=\mathbf{1}$; 2) que se cumpla que el cociente entre $\boldsymbol{YQ}$ y $\boldsymbol{SXQ}$ sea el mismo para todas los bienes y servicios (condición de cálculo de la mercancía-patrón); 3) que $\boldsymbol{Q}>\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{S}>\mathbf{0}$; 4) que $\mathbf{I}_h\boldsymbol{S}\mathbf{I}_v=\boldsymbol{n}$, siendo $\mathbf{I}_h$ el vector horizontal de unos e $\mathbf{I}_v$ el vertical de unos. Para evitar que el programa buscara soluciones cero en algunas de las variables se ha exigido que los productos de los multiplicadores $\boldsymbol{Q}$, por un lado, y de los coeficientes de ponderación $\boldsymbol{S}$, por otro, sean mayores que 0,1. El resultado son los multiplicadores 0,332;0,170;1,769, los coeficientes de ponderación 0,629;1,118;0,802 y los inputs de trabajo 0,062;0,053;0,885. La mercancía-patrón son las matrices $\boldsymbol{YQ}$ y $\boldsymbol{XQ}$. Todas las restricciones se ven cumplidas en el ejemplo.

cuadro 5: cálculo de los multiplicadores, la razón-patrón
y la mercancía-patrón mediante programación lineal

Y = productos finales

180	0	0	180
0	450	0	450
0	0	480	480

X = medios de producción

90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

S

0,110	0	0	
0	1,333	0	
0	0	1,557	
0,110	1,333	1,557	3,000
			0,229

L = inputs de trabajo

			LI
0,300	0,200	0,500	1,000

Q = multiplicadores

				Q
	0,100	0	0	0,100
	0	0,683	0	0,683
	0	0	2,217	2,217
tr(Q)=	0,100	0,683	2,217	3,000
				0,151

autovalor = 0,8073

YQ = mercancía-patrón

18	0	0	18
0	307	0	307
0	0	1064	1064

L Q = inputs de trabajo

			LQ
0,030	0,137	1,109	**1,275**

SXQ = mercancía-patrón

				YQ/SXQ	excedente (Y-SX)Q/SXQ
1	4	10	15	1,239	23,88%
16	114	118	248	1,239	23,88%
9	159	690	859	1,239	23,88%

$$g_m = \frac{Q^T Y^T I}{Q^T X^T S\, I} - 1 = 23{,}88\%$$

excedente (post) L(Y-SX)Q / LSXQ

11,70%

tr(Q)tr(Y)inv(Y)X

223,95	422,94	474,8	1121,687

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

tr(Q)tr(X)S		excedente (pre)
14,53 247,93 859,23	1121,687	L(Y-X)I / LXI
		21,52%
función objetivo	-0,00016	

Cuadro 5. En este quinto cuadro hemos dado un paso que ya no está en Sraffa, ni en su letra, ni en sus intenciones. Hemos utilizado el criterio de la mercancía-patrón para optimizar el empleo, es decir, en maximizar la función ***LQ*** (1,275), con la intención de pasar a un sistema económico virtual (mercancía-patrón) a partir del real que permitiera crear empleo, pero conservando las propiedades de la mercancía-patrón. Dos de estas son importantes: la primera, que la relación entre medios y productos se mantiene constante, tanto directa como indirectamente, lo que supone no tener que reasignar recursos una vez dado el paso de la economía real a la economía de mercancía-patrón (pero esta vez también real); la segunda, que esta posibilidad de creación de empleo a partir de la permanencia de la relación anterior es independiente de todas las variables monetarias (precios, salarios y ganancias). Claro, que la transformación y trasvase entre sectores es brutal, como se puede comprobar comparando las matrices de medios (***X***) y productos finales (***Y***) originales y las de la mercancía-patrón (medios=***SXQ***; productos=***YQ***). Los inputs de trabajo se han reasignado, pasando de 0,300 horas de trabajo para el primer sector a 0,030 en la mercancía-patrón; de 0,200 del segundo sector a 0,137; de 0,500 del tercer sector a 1,109. El resultado final es que, aumentando los inputs de trabajo un 27,5% (de **LI**=1 a ***LQ***=1,275), se consigue pasar de 480 en términos físicos del tercer sector (energía, por ejemplo, en kw-hora) a 1064 kw-h, pero a costa de reducir el primer sector (trigo, por ejemplo), pasando de 180 tn. a 18 tn, y reduciendo también el segundo sector (servicios bancarios, por ejemplo) de 450 horas de servicio a 307.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

cuadro 6: cálculo de los multiplicadores, la razón-patrón
y la mercancía-patrón mediante programación lineal

Y = productos finales

180	0	0	180
0	450	0	450
0	0	480	480

X = medios de producción

90	50	40	180
120	125	40	285
60	150	200	410

S = coeficientes de ponderación

0,548	0	0	
0	1,533	0	
0	0	0,919	
0,548	1,533	0,919	3,000
			0,772

L = inputs de trabajo

			LI
0,3000	0,2000	0,5000	1,000

Q = multiplicadores

				Q
	0,655	0	0	0,655
	0	1,230	0	1,230
	0	0	1,115	1,115
tr(Q)=	0,655	1,230	1,115	3,000
				0,898

autovalor = 0,7671

YQ = mercancía-patrón

117,9	0,0	0,0	117,9
0,0	553,6	0,0	553,6
0,0	0,0	535,2	535,2

L Q = inputs de trabajo

			LQ
0,196	0,246	0,558	1,000

SXQ = mercancía-patrón

				YQ/SXQ	excedente (Y-SX)Q/SXQ
32,3	33,7	24,4	90,4	1,304	30,361%
120,5	235,8	68,4	424,6	1,304	30,361%
36,1	169,6	204,9	410,6	1,304	30,360%

$$g_m = \frac{Q^T Y^T I}{Q^T X^T S\ I} - 1 = \quad 30{,}36\%$$

excedente (post)

L(Y-SX)Q/LSXQ

27,44%

tr(Q)tr(Y)inv(Y)X

273,45	353,77	298,41	925,631

tr(Q)tr(X)S

excedente

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

			(pre)
90,41 424,64 410,58	925,630		L*(Y-X)I / LXI
			21,52%
	0,00029		

Cuadro 6. Con los mismos datos de partida que el quinto, aquí la función objetivo es el excedente en términos de trabajo, alcanzando el valor de 27,44%. Recordar que el criterio de excedente es la diferencia entre los productos finales y lo medios de producción utilizados para alcanzarlo, es decir, la diferencia entre ***YQ*** y ***SXQ***. Se ha limitado porque, parece lógico, que tantos los multiplicadores ***Q*** como los coeficientes de ponderación ***S*** sumen 3 dado que tenemos tres sectores y tres tipos de bienes y servicios diferentes. En el caso general de ***n*** sectores también la suma sería ***n***, con lo cual ambos –multiplicadores y coeficientes de ponderación- están encerrados en un conjunto acotado y convexo. Las variables que pueden cambiar son –como siempre- los ***n*** multiplicadores de ***Q*** y los ***n*** coeficientes de ponderación de ***S***. Las restricciones son: 1) que el empleo global permanezca contante (***L*I**=***LQ***=**1**); 2) la misma relación entre productos y medios para todos los bienes y servicios (es decir, con mercancía-patrón, ***YQ***/***SXQ***); 3) que se cumpla la restricción de la mercancía-patrón construida a partir del criterio que viene determinado por la igualdad $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{X}^T$; 4) que ***Q***>**0** y ***S***>**0**. El resultado es el aumento del excedente en términos de trabajo ya señalado y de forma pormenorizado y en términos físicos de la siguiente manera: En el primer sector, que no tenía excedente (180 como producto final y 180 como medio de producción) ha pasado a valer 27,4 (117,9 producido con 90,4); el segundo sector tiene un excedente de 128,9 (553,6 con 424,6); el excedente para el tercer sector es 124,7 (535,2 producido con 410,6). Póngase las medidas físicas de cada bien o servicio y extiéndase a un conjunto de ***n*** sectores y estaremos en la economía real buscando la optimización del empleo bajo criterios *esrafianos* de la mercancía-patrón, es decir, con criterio de rendimientos constantes y sean cuales sean las variables monetarias con las que se trabaje. Es verdad que los trasvases del empleo necesarios son también brutales para algún sector (reducir el primero de 0,300 a 0,196, aumentar de 0,200 a 0,246 el segundo y aumentar también de 0,500 a 0,558 en tercero), pero estos cambios pueden ser limitados con restricciones en los multiplicadores ***Q***, permitiendo un máximo de variación del empleo por año, por ejemplo.

Algunas posibles conclusiones

Visto todo lo anterior parece claro que no fue baldío el intento de Sraffa de construir una mercancía-patrón para la producción conjunta y no sólo para la producción simple. En esta –en la simple– tenemos la inestimable ayuda del teorema de *Perron-Frobenius* para tal fin, pero no para la producción conjunta. La visión matemática de tal dificultad ha quedado clara en la exposición anterior, pero quizá no tanto el aspecto económico. En la producción simple la mercancía-patrón se construye ante la posibilidad de asignar todos los procesos que utilizan una mercancía como medio (las filas de los medios ***X***) a un solo producto final (un elemento de la diagonal de los productos finales ***Y***). Tal cosa es imposible en la producción conjunta dado que ahí tenemos no sólo ***n*** procesos como medios, sino ***n*** productos finales (una fila de ***Y***) provenientes de los ***n*** procesos (la misma fila de los ***X***). Veámoslo con las ecuaciones de definición de la mercancía-patrón:

(1) $$u\, y_i q_i = x_{i1}q_1 + x_{i2}q_2 + \Lambda + x_{in}q_n \quad \forall i = 1 \ a \ n$$

(2) $$u(y_{i1}q_1 + y_{i2}q_2 + \Lambda + y_{in}q_n) = x_{i1}q_1 + x_{i2}q_2 + \Lambda + x_{in}q_n \quad \forall i = 1 \ a \ n$$

siendo la (1) la ecuación definitoria de la producción simple y la (2) la de la conjunta. Puede comprobarse en la (2) que –a diferencia de la (1)– puede ocurrir que algunos de los sumandos sean negativos y, sin embargo, ser positiva la suma. Desde el punto de vista económico eso significa que el modelo de producción conjunta de Sraffa *no asigna unos medios concretos a unos productos concretos*, sino que establece que un conjunto de procesos determina otro conjunto de productos. Dicho de otra forma, la teoría de la producción conjunta de Sraffa está exenta de una función de producción específica, a diferencia de la teoría neoclásica de producción. La gran ventaja de la teoría de Sraffa respecto al modelo neoclásico es que las conclusiones y métodos de su modelo no dependen de ninguna variable monetaria, cosa que sí ocurre con la función de producción neoclásica, que no ha logrado zafarse ni del argumento circular de precios y rentas, ni del irresuelto problema de la agregación no monetaria de los factores de producción (en lenguaje neoclásico). Yendo más lejos, Sraffa lo que nos da en su modelo de producción conjunta es la influencia de un cambio en un medio de producción *cualquiera* $\boldsymbol{x}_{ij}$ en *todos* los productos finales $\boldsymbol{y}_{ij}$. En definitiva, el modelo de Sraffa es abierto porque tiene más incógnitas que ecuaciones. Sraffa nos da una pista para solucionar el problema: nos dice que "*si consideramos el problema desde el punto de vista de productos simples*"[43]. Nos invita a encontrar una forma de llegar a la solución Perron-Frobenius de la producción simple a sabiendas de que en la producción conjunta –la que sea– no podemos utilizar el teorema. Eso es lo que hemos hecho a lo largo del artículo. Pero Sraffa hace otra cosa: recurre a la brillante relación establecida por él en la producción simple ***r***=(**1**-***w***)***R*** entre tasa de salarios, tasa de ganancia y razón-patrón. Pero el problema que tiene ahora en la producción conjunta es que la razón-patrón no existe. Lo

[43] Pág. 79 de *PMPM.*

que hay es su equivalente, la tasa máxima de ganancia resultante de hacer cero la tasa de ganancia en la ecuación de definición del sistema. En definitiva, la fórmula anterior no es aplicable ni conceptualmente ni formalmente, porque ahora no tiene una matriz diagonal de productos finales de $\boldsymbol{n}$ elementos sino una no diagonal $\boldsymbol{n}\text{x}\boldsymbol{n}$. Aunque no dio con la solución, planteó el problema de construir la mercancía-patrón para la producción conjunta con diferenciación entre bienes básicos y no básicos. Tradujo y expuso el problema en términos económicos de la posibilidad de multiplicadores negativos en la construcción de la mercancía-patrón para este tipo de producción.

La solución de Sraffa puede interpretarse como un problema de programación lineal, técnica que estaba desarrollándose en el larguísimo tiempo durante el cual Sraffa escribió su obra capital. Podríamos decir que, con el criterio de Sraffa en la producción conjunta, se plantea el problema de encontrar unos multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$ del vector $\boldsymbol{Q}$, sujetos a $\boldsymbol{uZQ}=\boldsymbol{XQ}$ tales que minimicen $\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})$ -el excedente- con $\boldsymbol{Z}$ dependiendo de $\boldsymbol{X}$ y de $\boldsymbol{Y}$. O, en términos de trabajo, que maximicen el excedente $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\mathbf{I}$, que es un escalar, cosa apropiada a la teoría de la programación lineal. Como se ha visto a lo largo del artículo, una posible solución tiene tales desarrollos que no podía preverse a partir de la solución dada por Sraffa para la producción simple.

La posibilidad de multiplicadores negativos que den lugar a productos finales negativos ($\boldsymbol{y}_{ij}\boldsymbol{q}_j$) la justifica también Sraffa como "*una obligación de entregar sin pago ciertas cantidades de determinadas mercancías*"[44]. Pero ello exige la monetización de las variables físicas, es decir, la multiplicación de los productos físicos por sus precios, lo cual está prohibido en la construcción de la mercancía-patrón. No parece muy convincente la interpretación económica de Sraffa de esta posibilidad de bienes negativos en esa construcción virtual que es la mercancía-patrón, pero el tema queda abierto, porque es plausible que esta posibilidad avoque a una especie de divorcio entre el instrumental matemático y su interpretación económica.

En este artículo se ha visto que no existe un único criterio de construcción de la mercancía-patrón para la producción conjunta. La idea general –inspirada en Sraffa– es encontrar unos multiplicadores $\boldsymbol{q}_i$ y un coeficiente (o varios) de nivel de actividad $\boldsymbol{u}$ que, aplicados a los medios de producción y a los productos finales, sea posible con ellos construir una mercancía que represente a la economía –al excedente– independiente de los precios. Pero cumpliendo esos requisitos, aquí se presentan dos criterios. Con el primero se llega a que los multiplicadores dependen de los medios de producción $\boldsymbol{X}$, de los productos finales $\boldsymbol{Y}$ y de las tasas de ganancia y salarios máximos; por el segundo, estos multiplicadores dependen explícitamente de los inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$ y no explícitamente de los productos finales $\boldsymbol{Y}$. El resto de las variables mencionadas son comunes. El criterio de Sraffa es el de minimización de una función objetivo –la razón-patrón, $\boldsymbol{R}$– sujeta a la ecuación de definición de la mercancía-patrón $\boldsymbol{uYQ}=\boldsymbol{XQ}$ al no poder aplicar *Perron-Frobenius* implícitamente en la producción conjunta. Creo que a Sraffa el pasar directamente de la producción conjunta general al caso particular de la

[44] Pág. 73 de *PMPM.*

producción conjunta con diferenciación entre bienes básicos y no básicos no le ayudó a establecer un texto más clarificador. En este artículo además se ha llevado un punto más de lo hecho por el economista italiano al indicar un método de construcción de la mercancía-patrón para la producción conjunta *con* capital fijo.

Aunque sea paradójico, se ha visto que se encuentran más posibilidades de sortear el escollo de los multiplicadores negativos cuanto más generales se han hecho los supuestos. En concreto, en el caso de la producción conjunta con diferenciación entre bienes básicos y no básicos con capital fijo, pero con coeficientes generalizados (matrices en lugar de escalares), se pueden tantear valores para estos coeficientes que den multiplicadores no negativos. Si Sraffa no llegó más lejos en esta problemática que el mismo planteó (construcción de la mercancía-patrón para la producción conjunta) fue porque renunció en exceso al uso de las matemáticas. Aun así, hay que considerar que el gran economista italiano hizo la parte del león del esfuerzo.

En la última parte del artículo se ha propuesto dos métodos de planificación para la producción conjunta a partir de Sraffa: con criterio de mercancía-patrón y sin élla. La idea básica de ambos métodos es la posibilidad de reasignar los recursos (medios de producción) de tal forma que vayan estos desde los procesos (o empresas) de menor capacidad de creación de excedente (en términos de trabajo) a los que tienen mayor capacidad. Aunque los datos de los que partimos son arbitrarios, todo indica que este método tiene unas posibilidades notables de creación de excedente, incluso con las limitaciones que impone la realidad económica.

Bibliografía

Abraham-Frois, G y Berrebi, E.: "Theory of Value, Prices and Accumulation", 1979, Cambridge U. Press (original en francés, 1976).

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri: "Theory of Production", 1997.

Kurz y Salvadori: "Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson", en "Piero Sraffa´s Political Economy, edit Routledge,

Kurz, Schefold, Salvadori: "Sraffa or an alternative economics", 2008, edt. Palmagrave Macmillan.

Neri, Salvador: "Besicovitch, Sraffa and the existence of Standard Commodity", 2010: http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf

Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción" ("*Lezioni di teoria della produzioni*", 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: "Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta", 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Roncaglia, Alessandro: "Piero Sraffa", Edit. Palgrave MacMillan, 2009.

Roncaglia, Alessandro: "Sraffa and the Theory of Prices", 1978 [*Sraffa e la teoria dei prezzi*, 1975]

Schefold, Bertram: "Mr. Sraffa on Joint Production", 1971

Sraffa, Piero: "Produción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means of commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.