

SRAFFA AND HIS THEORETICAL REVOLUCION

Antonio Mora Plaza

Economista, Madrid

Abstract.- This article attempts to demonstrate that the work of Piero Sraffa –especially *Production of commodities by means of commodities* - is the greatest revolution in economic analysis. The novelties introduced by the Italian economist, against all classical and marginalist traditions, such as considering the surplus of reproducible goods as the object of the economy, the intersectoral relations between goods and services on the one hand and processes on the other, the prices formed as a margin on costs, reduction of capital to dated work, the selection of techniques and the considerations about of the joint production support the above statements. To this we can add other more questionable or more or less significant as the standard system, its theory of fixed capital, the considerations on land and mines, the differentiation between basic and non-basic goods. Some of these analyzes have precedents or are contemporaries (physiocracy, Ricardo, Leontief), but the whole of them supposes this revolution made in the economic analysis and supposes for this the ideal model to be candidate to base any economic analysis worthy of such name.

Keywords: *Sraffa, economic analysis, theoretical revolution*

Resumen.- En este artículo se intenta demostrar que la obra de Piero Sraffa –en especial *Producción de mercancías por medio de mercancías*- supone la mayor revolución del análisis económico. Las novedades introducidas por el economista italiano contra toda tradición clásica y marginalista tales como considerar el excedente de los bienes reproducibles como objeto de la economía, las relaciones intersectoriales entre bienes y servicios por un lado y procesos por otro, los precios formados como un margen sobre los costes, la reducción del capital a trabajo fechado, la elección de las técnicas y las consideraciones sobre la producción conjunta avalan las afirmaciones anteriores. A ello le añadimos otras más discutibles o más o menos significativas como el sistema patrón, su teoría del capital fijo, las consideraciones sobre la tierra y las minas, la diferenciación entre bienes básicos y no básicos. Algunos de estos análisis tienen precedentes o son coetáneos (fisiocracia, Ricardo, Leontief), pero el conjunto de ellos supone esa revolución que hace del análisis económico de Sraffa como el modelo idóneo para ser candidato a fundamentar cualquier análisis económico digno de tal nombre.

Palabras clave: *Sraffa, análisis económico, revolución teórica*

JEL: B24

Introducción.

Tras más de una década estudiando y desarrollando la obra de Piero Sraffa he llegado a esta conclusión: Sraffa introduce en el análisis económico la mayor revolución de toda la historia del análisis, mayor aún que la del propio Marx,

mucho más acertada que el desvarío de Jevons, más analítica que la descriptiva de Leontief con la que se emparenta, más importante que la del propio Keynes en la medida que atañe a los fundamentos del análisis económico y no se queda en un avance parcial. Nos ceñimos a la Economía y, en concreto, al análisis económico. En este artículo me propongo demostrar tal hecho. Por ejemplo, el marginalismo de Gossen, Menger, Walras y, sobre todo, de Jevons es también un cambio sustancial –aunque contra-revolucionario- respecto a la tradición clásica de Smith, Malthus, Mill, Ricardo y Marshall (este último participa de la propia revolución porque su obra es posterior a de los marginalistas mencionados). La misma Fisiocracia supone un cambio sustancial en la manera de abordar la Economía para su época, puesto que era la primera vez que se presentan relacionadas en un flujo circular producción, rentas y consumo asignadas a clases sociales. Ricardo desarrolló de la nada la teoría de los costes comparativos, verdadera genialidad, pero, en cambio, su teoría de la renta de la tierra tiene precedentes. Con Keynes y Kalecki nace una nueva rama de la Economía como es la Macroeconomía, otorgando un papel decisivo al Consumo, aunque en este caso no se trata de una visión crítica de lo anterior sino un sustancial añadido a lo que había hasta entonces (lo anterior a Keynes estaba compilado en *los Principios* de Marshall). No considero, en cambio, a Marx un revolucionario del análisis económico por más que se empeñara Althusser en demostrar lo contrario desde un plano filosófico. Marx, fundamentalmente, es un sociólogo y un revolucionario político. Tal es así que el propio Sraffa, que de corazón era un hombre de izquierdas, amigo de Gramsci y al que visitó en la cárcel, no utilizó a Marx ni siquiera como referencia¹. No hay nada “marxista” en *Producción de mercancías por medio de mercancías*; si Marx no hubiera existido la obra teórica de Sraffa hubiera sido la misma. Pero todos estos logros y otros que no menciono por la brevedad de este trabajo son avances parciales, conquistas teóricas dentro de un cuerpo teórico más amplio, quizá con la posible excepción de Marx que, con *El Capital*, crea también una nueva forma de hacer análisis económico a partir de su teoría de la explotación considerando que el capitalismo un modo de producción más de los que se han dado a lo largo de la Historia. La pregunta pertinente en Marx es que, desde al menos un punto de vista analítico, su teoría de la explotación –el núcleo duro de la parte socioeconómica- ¿es una ley económica o una definición? Ahí lo dejamos porque este trabajo no trata de Marx específicamente. En Sraffa tiene todo el marchamo de lo nuevo, una

¹ En el prefacio de *PMpM*, además de los matemáticos Besicovitch, Ramsey y Watson, solo menciona a los economistas Adam Smith, David Ricardo, P.H. Wicksteed y Keynes. Ya en un apéndice titulado “Referencias a la literatura” (económica, se sobreentiende) sí menciona a Marx junto con Quesnay por su *tableau*, de nuevo a Ricardo, Torrens y Malthus. En total, ocho economistas más tres matemáticos. Llama la atención que en ningún momento mencione a Marshall dado que todos los economistas de la época se habían educado en los *Principios* del economista inglés. “Matar” intelectualmente al padre siempre cuesta trabajo. A Marx sólo lo menciona en la enumeración y nada dice de él o de su obra.

verdadera revolución, con gran parte de su obra surgidas *ex-novo*, sin antecedentes. Sraffa crea y/o desarrolla una teoría del *capital fijo*, una visión sui géneris de la *producción conjunta*, una nueva forma de separar los *bienes básicos de los no básicos* desde la producción y no desde el consumo, un instrumento auxiliar para intentar una medida objetiva de la Economía como es la *mercancía-patrón* y la *razón-patrón*, reduce el capital a *trabajo fechado*, coloca al excedente –de los bienes reproducibles– como objeto de la Economía y no la asignación de recursos o la formación de los precios, preocupación del marginalismo; otorga un *grado de libertad* a las variables distributivas, a diferencia del determinismo *walrasiano*.

Vamos a desgranar y concretar en este trabajo esos aspectos que le hacen revolucionario en la teoría y, a la vez, realista, nada metafísico y desvariado como los marginalistas con sus costes y productividades marginales, con análisis global de la economía a diferencia del análisis parcial de Marshall, nada metafísico como el Marx de la teoría del valor-trabajo, nada tan abstracto como Walras y su teoría del equilibrio general. La obra de Sraffa está llamada a representar, tarde o temprano, los fundamentos del análisis económico. La cuestión se ha resistido en más de medio siglo desde la publicación de su obra *capital* por motivos puramente ideológicos, pero la cosa no ofrece más dilación porque, además, la teoría económica convencional ha tenido un fracaso –uno más– con la crisis actual que comenzó en el 2007 porque la ha dejado huérfana de explicación. Mejor suerte ha tenido algún *post-keynesiano* heterodoxo, pero los keynesianos, en su mayoría, fueron apartados de cátedras y medios de comunicación desde finales de los años 70 del siglo pasado. Keynes y Kalecki –éste doblemente– son dos grandes damnificados que hay que recuperar a marchas forzadas antes de que los Friedman², Hayek³, Lucas, Sargent, etc., nos vuelvan a decir que el mercado por sí sólo resolverá todos los problemas. Sin más dilación vamos a ir punto por punto estos aspectos revolucionarios, a veces únicos y otros compartidos parcialmente:

I – Sraffa parte de las relaciones intersectoriales que se establecen en la Economía entre compradores y vendedores, entre producción y consumo. No es enteramente original en este punto. Ya hemos mencionado la Fisiocracia, el más claro antecedente de Sraffa, pero también guarda un gran parentesco con el análisis *Input-Output* de Leontief, desarrollado al mismo tiempo que la obra de Sraffa por el economista de origen ruso en la Unión Soviética en los años 30 del siglo pasado y luego en USA. También es coetáneo con la obra de Sraffa el modelo dinámico de Von Neumann. Pero Sraffa le da un toque de

² Friedman murió en el 2006, pero sus discípulos y epígonos se han hecho con mayoría de cátedras en USA.

³ Hayek murió en 1992, pero sus discípulos de la escuela austríaca están muy presentes en universidades y gobiernos.

originalidad en un aspecto que quizá no ha sido valorado suficientemente. En Leontief columnas y filas son bienes y servicios que un sector vende a otro sector, de ahí que la matriz de Leontief sea cuadrada. Las filas de las matrices que definen el modelo de Sraffa son los bienes y servicios de la economía –en Sraffa mercancías, *commodities*–, y las columnas son procesos y no sectores, a diferencia de las tablas de Leontief. En Sraffa lo que diferencia la producción de un bien o servicio de otro no es el sector administrativo –siempre algo artificial como asignación– donde se ubica, sino la manera de cómo se produce. Por ejemplo, dos empresas eléctricas que producen con el mismo método –pongamos, la energía de origen solar– el mismo bien como es un kilowatios/hora, son, para Sraffa, indistinguibles. Ello va a permitir –como en otro epígrafe veremos– el fenómeno de la producción conjunta de forma natural y general, y no como caso especial, como lo hace el análisis más clásico⁴. Sraffa cambia la perspectiva y hace de la producción simple un caso particular de la producción conjunta, a diferencia del análisis neoclásico. Pero la introducción de la idea de proceso en un lugar de sector tiene que pagar un precio intelectual en Sraffa: que considere el economista turinés que el número de procesos y de mercancías producidas sean iguales. Matemáticamente facilita las maniobras algebraicas pero, en mi opinión, es un precio excesivo que puede rectificarse. En efecto, sólo por una casualidad imposible podrían ser iguales número de productos y número de procesos. Ello le permitía definir la Economía formalmente con su ecuación:

$$(1) \quad PY = wL + (1 + g)PX$$

Donde P es el vector de precios $1 \times n$ tanto de bienes y servicios finales como el de medios de producción, Y sería la matriz de productos finales $n \times n$, X la matriz también $n \times n$ de medios de producción, L el vector $1 \times n$ de *inputs* de trabajo, y w y g las tasas unitarias de salario y ganancias respectivamente. Si la matriz de productos finales Y es cuadrada podemos despejar los precios en (1) y tener la ecuación:

$$(2) \quad P = wL[Y - (1 + g)X]^{-1}$$

⁴ Thomas J. Sargent, premio Nobel de Economía en el 2011, dice en su libro *Macroeconomic Theory* que “La economía consiste de un elevado número de empresas perfectamente competitivas, cada una de las cuales produce el único bien utilizando la misma función de producción” (traducida en editorial Antoni Bosch en 1982). Y ahí se queda durante todo el libro. Mayor dislate parecía imposible, pero en el mismo capítulo I de la cita anterior dice que “el capital representa la cantidad acumulada del único bien disponible”. Como se ve nada es imposible de mejorar (en este caso, de empeorar). Otra perla: “... se supone, sin embargo, que las empresas pueden alterar su empleo instantáneamente”. Y de esos supuestos no se mueve el Sr. Lucas en todo el libro. Y el Sr. Lucas es premio Nobel de Economía.

Sin embargo sí es posible calcular la inversa de una matriz no cuadrada siempre que cumpla un requisito. Por ejemplo, la inversa de la matriz Y , si fuera $m \times n$, sería:

$$(3) \quad P = [wL + (1 + g)PX] Y^T (YY^T)^{-1}$$

Ahora bien, el precio a pagar es que para que exista $(YY^T)^{-1}$ debe ocurrir que n sea mayor que m , es decir, que el número de procesos sea mayor o –a lo sumo igual– que el número de bienes y servicios⁵. Y si no queremos pagar ningún precio simplemente hay que considerar que un sistema derivado del modelo de Sraffa sería aquel que tendría $m-n$ grados de libertad, cosa que nos acerca mucho más a la realidad que lo igualar bienes y procesos o sectores. Sraffa no siguió exactamente este camino ni lo atisbó, y prefirió una solución algo artificiosa– que luego veremos– en el tema de la producción conjunta. En cualquier caso nadie ha profundizado tanto como Sraffa en las relaciones intersectoriales, en las consecuencias que se derivan de ellas al complementar estas relaciones con los precios y las tasas unitarias distributivas, al señalar la importancia de las proporciones entre productos y medios de las empresas que venden a otras empresas para obtener las soluciones de precios, salarios y ganancias de su modelo.

Sraffa dice en el prólogo de *PMpM* que el no supone rendimientos constantes a escala, pero añade con sorna que quien quiera hacer tal supuesto lo puede hacer. Pero una cosa son los deseos y otra los hechos, y hay que decir que en Sraffa está al menos implícito este supuesto es la consideración del capital como trabajo fijo y en el de la elección de las técnicas (“desplazamiento de los métodos de producción”, cap. XII). Keynes, cuando leyó el manual o parte de él, dijo que se hacía tal supuesto, aunque no por ello habría que entenderlo como una crítica. No es seguro que Keynes entendiera a Sraffa ni tampoco que leyera *PMpM* entero tal como se presentó en la primera edición de 1960. El hipercrítico Sraffa también lo era con su propio mentor, Keynes, en especial con su teoría monetaria, y por ello dijo lo mencionado en el prólogo de *Producción...*

Dar la importancia que le dio Sraffa a las relaciones intersectoriales es decisivo en el análisis económico, pero hacerlo considerando que lo importante son los procesos y no los sectores, situar al capital fijo como caso general de la economía y dotar al sistema con un grado de libertad –o infinitos si desarrollamos su obra– supone un cambio radical respecto, incluso, a lo hecho

⁵ La alternativa es aceptar que el número de bienes y servicios sea mayor que el de procesos y dejar que la diferencia sea los grados de libertad con los que se trabaje. Habría infinitas soluciones para los precios, pero acotadas a que cumplieran las ecuaciones.

por Leontief y Von Neumann, una verdadera revolución teórica que no encuentro que hay sido convenientemente valorada por sus epígonos.

II – Si hay algo que diferencia notablemente el modelo de Sraffa del marginalista es la formación de los precios. Para el marginalismo los precios se forman de acuerdo con los *costes marginales*; para Sraffa se forman como *un margen sobre los costes totales*. Además, en Sraffa los costes dependen del conjunto de la economía, porque el valor de los medios de producción depende del conjunto de precios, salarios y ganancias, y no de cada empresa particular, tal como lo hace el análisis parcial *marshalliano*, aún fundamento del análisis económico neoclásico. Es verdad que Sraffa trabaja con un modelo muy simplificado, con tasas unitarias de salarios y ganancias, con precios de equilibrio⁶ porque el vector de precios de los productos finales es el mismo que el de medios de producción, o con la tasa de ganancia sin abarcar a los costes salariales (*salarios post-factum*), pero todo ello es fácilmente subsanable mediante, por ejemplo, la ecuación:

$$(4) \quad PY = L[W \otimes (I + G)] + P[X \otimes (I + G)]$$

donde la matriz $n \times n$ de salarios W se multiplica elemento a elemento por los de la matriz $n \times n$ resultante $I + G$. También cada elemento ij de la matriz de medios X se multiplica por el elemento ij de $(I + G)$. Es decir, se trata de una multiplicación *aritmética* en lugar de un producto *matricial*. Es tal la diferencia entre ambos esquemas de pensamiento en este aspecto del análisis económico que hace incompatible la visión de Sraffa de la marginalista. No ocurre lo mismo con las visiones keynesianas o marxistas, que posibilitan la integración en un mismo modelo con Sraffa aportando éste los fundamentos. Visión realista de nuevo en Sraffa frente a la metafísica de los costes marginales y la de los valores-trabajo marxista. Roncaglia ha justificado las tasas unitarias bajo dos aspectos o con dos posibilidades: con la teoría de la competencia y/o la de la gravitación de los valores reales en torno a los teóricos que surgen de la resolución del sistema de ecuaciones. En cualquier caso en el mundo real no hay discusión: las empresas calculan los precios añadiendo un margen a los costes y no saben ni pueden calcular el nivel de producción de cada producto de tal manera que los costes marginales del último producto producido sea igual a los precios, precios que, según el

⁶ Muchos defienden que Sraffa no trabaja ni tiene por objetivo el equilibrio. En mi opinión lo segundo es cierto pero lo primero no. De hecho, el que se pueda calcular los precios en la producción simple con el teorema Perron-Frobenius (si la matriz $A = XY^{-1}$ cumple lo requisitos) es porque estamos en un punto fijo dado que el teorema P-F es una versión de este teorema para el álgebra de matrices. La diferencia con Walras y otros modelos de equilibrio general (Arrow y Hahn, Debreu, Balasko) es que estos buscan llegar a un equilibrio con precios que vacíen los mercados y Sraffa parte de un equilibrio al ser el vector de precios el mismo para los medios que para los productos.

marginalismo, viene dado por las condiciones de mercado: si competencia, los precios son *precios-aceptantes*, si no hay competencia perfecta, los precios se sustituyen por los *ingresos marginales*. Todo un dislate, la cumbre de la metafísica.

La teoría de los precios que se deduce de la obra de Sraffa da para más y, sin embargo, él no dedicó capítulo específico al tema, llevando como siempre sutilmente la contraria a la tradición clásica y marginalista. Se puede especular que se deba a varios motivos: 1) porque el objeto del análisis económico para Sraffa es el excedente y no la asignación de recursos; 2) porque al encontrar una relación entre las tasas distributivas y la razón-patrón sacaba los precios del sistema, mostrando que esa relación vale sean cuales sean los precios⁷. Esto último, en mi opinión, es discutible pero creo que estaba en la intención de Sraffa y lo desarrolla en el capítulo V de *PMpM*.

Por las características de los bienes y servicios –sólo mercancías en Sraffa– el economista italiano pudo elegir entre bienes de consumo y de inversión (o de capital) o por la diferenciación del papel que jugaban en la producción. Sraffa eligió novedosamente esto último que veremos en otro epígrafe. De su obra se puede justificar la siguiente ecuación de precios:

$$(5) \quad P_c C + P Y = (1 + g) [w L + P X]$$

donde el vector de precios de los bienes de consumo P_c se extiende de m a n , es decir, P_c es un vector $1 \times m$, y la matriz de bienes de consumo C ¡ya no es cuadrada! sino $m \times n$. En cambio los precios de los bienes de capital o medios de producción serían –como hasta ahora y como está en Sraffa– un vector $1 \times n$. Por su parte la matriz de medios X sería a su vez cuadrada. Es evidente que con solo esta ecuación de n elementos tenemos muchos grados de libertad puesto que hay $1 \times m$ precios de los bienes de consumo P_c , más los precios de los medios $1 \times n$, más las dos variables distributivas. En total $m+n+2-n$, es decir, $m+2$ grados de libertad. Para los economistas clásicos y, sobre todo, para los marginalistas a partir de Walras, la ecuación anterior sería inaceptable porque el modelo no determina los precios, no es un modelo determinista. Para el modelo de Sraffa es una bendición porque eso permite que las condiciones de mercado acabe con los grados de libertad. Es decir, en un mundo *esrafiano* –

⁷ De hecho, en su modelo, ha de calcularse conjuntamente el vector de precios y las variables distributivas tasa de ganancia y tasa de salarios. El error de Sraffa consiste en creer que, porque el excedente monetario $P(Y-X)I$ se utilice como numerario y se le de un valor constante, ello no va a influir en las variables distributivas. Ocurre lo mismo con el otro numerario que emplea que es la suma de los inputs de trabajo, es decir, LI . En ambos casos, a pesar de que su suma sea constante, la distribución interna de precios e inputs de trabajo influye en la solución de las ecuaciones. En el caso de los inputs de trabajo la cosa es más clara porque son datos de partida y no variables como lo son los precios.

derivado de Sraffa, porque la ecuación no está en su libro– los mercados y la política económica serían libres de fijar los precios siempre que cumplieran la ecuación (5). Grados de libertad tienen para ello. A esta ecuación puede plantearse con lógica *esrafiana* su complemento:

$$(6) \quad P_c C + P Y = (1 + g_m) P X$$

donde el salario w se han hecho cero y la tasa de ganancia g se ha convertido en la tasa de ganancia máxima g_m . Aquí se reducen los grados de libertad notablemente porque ahora tenemos $2n$ ecuaciones (la 5 y la 6) y $m+n+2$ variables, por lo que los grados de libertad serán $m-n+2$. Esto exige que los bienes de consumo sean mayores que los de capital en el mundo real⁸, lo cual es una propuesta razonable. Con la dos ecuaciones anteriores obtenemos los precios de los medios de producción P :

$$(7) \quad P = \frac{(1 + g)w}{g_m - g} L X^{-1}$$

También obtenemos la de los bienes de consumo:

$$(8) \quad P_c C = (1 + g)wL - \frac{(1 + g)w}{g_m - g} L X^{-1} [Y - (1 + g)X]$$

Y ahora, a diferencia de la ecuación anterior donde los precios de los medios de producción quedaban con los grados de libertad de las variables distributivas, es decir, dos grados⁹, tenemos directamente los grados de libertad anteriores, es decir, $m-n+2$. Es claro que la ecuación anterior exige la producción conjunta puesto que tenemos (o suponemos por hipótesis) más bienes de consumo que de medios de producción, lo cual exigiría -de acuerdo con el criterio de Sraffa- que se cumpliera al menos uno de los casos de producción conjunta: que un mismo proceso produzca más de un bien. Es verdad que Sraffa, ante este problema (aunque sin desarrollar su modelo con estas ecuaciones), comenta¹⁰ que si hay un proceso que produce dos bienes

⁸ Siguiendo la línea metodológica y epistemológica iniciada por Sraffa para el análisis económico (que es la línea de Einstein para la Física), aunque es inevitable analizar la realidad a través de modelos, estos han de incorporar la dosis de realismo mayor posible en sus hipótesis teóricas. Es lo que hacemos desarrollando la obra de Sraffa. Es la misma razón por lo que empleamos el criterio de los salarios *pre-factum*, rectificando al Sraffa de los salarios *post-factum*.

⁹ Si tomamos algún precio o el excedente monetario $P(Y-X)I$ como numerario tendríamos un grado de libertad, con lo cual el espíritu *esrafiano* del análisis se mantiene.

¹⁰ Epígrafe 50, cap. VII.

debe haber “un segundo proceso paralelo que producirá las dos mercancías por un método diferente”. Esto ya no es aceptable, pero Sraffa lo justifica para poder calcular los precios, lo cual es posible. En este aspecto Sraffa fue atrevido pero no tanto como pudo. Aquí no fue revolucionario pero sí distinto una vez más.

Comentábamos el atrevimiento de Sraffa, pero es que lo pudo haber sido más si hubiera incluido en este modelo hipotético que nunca hizo explícito una tercera ecuación que, no por hipotética, menoscaba el espíritu *esrafiano*:

$$(9) \quad P_c C + P Y = w_m L + P X$$

que es la que surge de hacer cero las ganancias en lugar de -o además- hacerlo los salarios. Pero si siguiéramos por estos vericuetos nos alejaríamos de Sraffa en demasía y se alargaría en exceso este trabajo¹¹, pero el camino abierto con (9) sería una revolución dentro de la revolución *esrafiana*.

III – Al marginalismo se había incorporado la teoría neoclásica del capital¹². En esta teoría era esencial dos cosas: 1) la posibilidad de separar el trabajo de el capital como medios de producción para poder justificar –también por separado– sus retribuciones, es decir, las rentas del trabajo y del capital; que fueran –según el marginalismo– como valor de la exotérica *productividad marginal* no era tan importante aunque sí absolutamente descabellado; 2) que existiera una relación inversa monótona decreciente entre el capital y su retribución, fuera cual fuera la estructura del capital¹³. Esta teoría ya había sido puesta en cuestión por Joan Robinson –¿en qué se mide el capital?, ¿cómo se homogeneiza?–, por otros economistas como Kaldor y, posteriormente, por Garegnani, Bhaduri, Pasinetti, etc., la mayor parte de los cuales habían estado en el Cambridge inglés de los años 30 del siglo pasado o eran de discípulos y/o epígonos de los Robinson, Kaldor, Keynes o Sraffa. El economista italiano no

¹¹ Aunque tenemos tres sistemas de ecuaciones, es decir, **3n** ecuaciones, no por ello disminuyen los grados de libertad ya calculados dado que se puede considerar la ecuación de definición primera de los bienes de consumo como una combinación lineal de las dos siguientes, es decir, del sistema de ecuaciones que surge al hacer cero los salarios y el sistema de ecuaciones que nace a su vez de hacer cero las ganancias.

¹² Para la teoría de el capital y las críticas que recibió tenemos el clásico de G.C. Harcourt que lleva el mismo nombre. En castellano, en Oiko-Tau, 1975. Y también valorar la no menos excelente recopilación de artículos por Oscar Braun en castellano en Editorial Tiempo Contemporáneo (no figura la fecha de la recopilación) en un libro titulado *Teoría del capital y la distribución*.

¹³ Siendo generosos con la esta visión neoclásica, no hemos añadido como esencial en esta visión la necesidad de la agregación porque entonces este disparate facilita la crítica pero la sitúa en un elemento secundario. De hecho Samuelson consideró en un primer momento que había salvado la crítica de los de Cambridge inglés con su ingeniosa aparente solución del *libro de las técnicas*. Luego él mismo reconoció que eso no fue suficiente.

interviene directamente en la polémica, pero su formulación de la teoría de los precios pone patas arriba la teoría neoclásica. Veamos cómo. A partir de la ecuación de definición del sistema (1) y con la matriz de requerimientos **A** obtenida de la ecuación matricial **X=AY**, sale que:

$$(10) \quad P = wLY^{-1} \left[I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \dots + (1+g)^{n-1} A^{n-1} \right]$$

Si hubiera dos técnicas diferentes habría dos ecuaciones como la (10) con vectores de precios **P**, *inputs* de trabajo **L**, productos finales **Y** y matriz de requerimientos **A** distintos. Si *post-multiplicamos* ambas ecuaciones por la matriz de productos finales y por el vector vertical de unos **I** para poder hacer la suma del valor de los productos finales, queda el *escalar*:

$$(11) \quad PYI = wLY^{-1} \left[I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \dots + (1+g)^{n-1} A^{n-1} \right] YI$$

Ahora sólo resta despejar los salarios y poner estos en términos del producto agregado **PYI** y quedan ambas ecuaciones como:

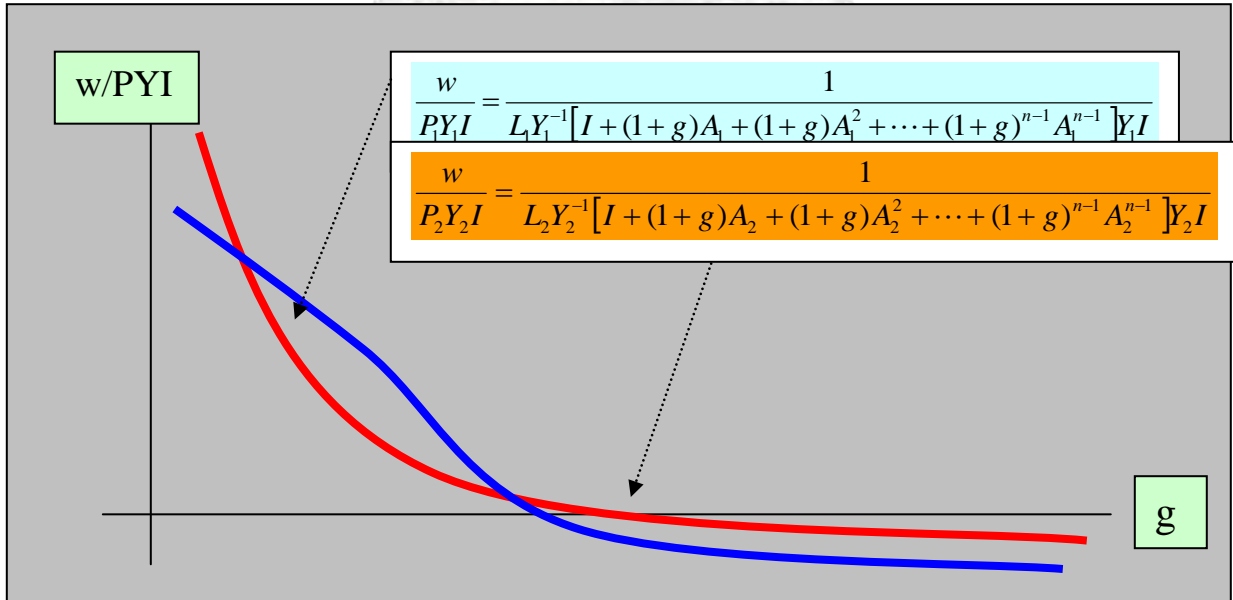
$$(12) \quad \frac{w}{PY_1 I} = \frac{1}{L_1 Y_1^{-1} \left[I + (1+g)A_1 + (1+g)A_1^2 + \dots + (1+g)^{n-1} A_1^{n-1} \right] Y_1 I}$$

$$(13) \quad \frac{w}{P_2 Y_2 I} = \frac{1}{L_2 Y_2^{-1} \left[I + (1+g)A_2 + (1+g)A_2^2 + \dots + (1+g)^{n-1} A_2^{n-1} \right] Y_2 I}$$

Y una de las técnicas es más rentable para una determinada tasa de salario que la otra; para tasas de salario más bajas es más rentable la otra, pero para salarios aún más bajos reaparece la primera técnica si se quiere ir optimizando las ganancias en cada momento. Es la llamada *reaparición de técnicas* de lo que llamó Samuelson "el libro de las técnicas". No existe pues una relación siempre decreciente entre ganancias y el capital¹⁴ (cada técnica se supone que es una variación del capital, puesto que varía la matriz de requerimientos **A=XY⁻¹**, además del vector de *inputs* de trabajo **L** y la matriz de productos finales **Y**). Y lo sorprendente y apabullante para la teoría del capital neoclásica

¹⁴ Si igualamos las ecuaciones (12) y (13), es decir, si hacemos **w/P₁Y₁I=w/P₂Y₂I** obtenemos un polinomio de grado **n** en la que la única variable a determinar es la tasa de ganancia **g** ante tasas de salarios iguales. Dicho de otra forma, tenemos **n** posibles soluciones de la ecuación resultante, es decir, **n** posibles puntos de corte entre ambas ecuaciones. Visualmente una situación así parecería dos serpientes que se entrelazan **n** veces (como máximo) con monotonía decreciente. Algunas de esas soluciones no serán reales (soluciones imaginarias) y/o serán repetidas. Desde el punto de vista del análisis económico significa que las empresas podrán mantener los mismos salarios, a la vez que variar sus tasas de ganancia yendo de una técnica a otra. Y eso que sólo contemplamos dos técnicas. ¿Cómo es posible después de esto que se siga explicando la teoría del capital neoclásica en los libros de Introducción al análisis?

es que el gráfico se ha obtenido a partir de la sencilla e inexcusable ecuación $PY=wL+(1+g)PX$. Con salarios *pre-factum* la ecuación correspondiente sería la misma que la (11), solo que los salarios irían multiplicados por el factor $(1+g)$. El propio Samuelson reconoció la derrota de lo que se llamó “segunda trinchera”, pero ello no le importó ni importunó para escribir el manual más exitoso de la historia del análisis económico, incorporando en él la teoría neoclásica del capital aunque supiera de su incoherencia o inconsistencia. Veamos el gráfico:



IV – Nos adentramos en el territorio de la producción conjunta. Dice Sraffa que se da la producción conjunta si “dos de la mercancías son producidas conjuntamente por una sola industria (o, mejor, por un solo proceso...)”¹⁵. Y a continuación considera también el caso contrario: el de dos procesos produciendo la misma mercancía. La razón de ello es que Sraffa no quiere dejar la placidez de una matriz cuadrada porque sabía de sobra que eso le permitía igualar el número de ecuaciones con el número de incógnitas y hacer resoluble su ecuación fundamental que hemos expuesto en (1). En este punto hay que decir que resulta artificiosa y también innecesaria que hayan de coincidir número de mercancías y número de procesos, y más si los dos casos de producción conjunta se dan en bienes y servicios distintos. Ya hemos visto en el epígrafe de los precios que no necesariamente número de bienes y número de procesos han de coincidir. Es verdad que para que exista la inversa de la matriz de productos finales –necesario para poder calcular los precios– ha de ocurrir que el número de procesos ha de ser mayor que el de productos finales. Pero ni siquiera eso es necesario desde el punto de vista económico: puede darse una ecuación fundamental con más productos que procesos. Es

¹⁵ Es discutible que una misma técnica produzca dos bienes diferentes, pero sí es posible con métodos (técnicas) diferentes puedan producirse un mismo bien o servicio.

verdad que en este caso existirían infinitas soluciones posibles en el cálculo de los precios, pero no por ello habría que cambiar los conceptos *esrafianos*. Ocurriría que las matemáticas implicadas se harían más complicadas y habría que recurrir a la programación lineal. En todo caso ningún método de resolución cambiaría lo expuesto sobre los grados de libertad.

La producción conjunta es una dosis de realismo y habría que decir que cualquier libro sobre los fundamentos del análisis económico que no contemplara esa posibilidad no sería un buen libro de Economía. La realidad, desgraciadamente, es muy distinta. Un aspecto fundamental de la producción conjunta -aun cuando el número de procesos y el número de bienes y servicios producidos fueran iguales- es el de los precios. En la producción simple se puede demostrar que si la matriz XY^{-1} cumple los requisitos del *teorema de Perron-Frobenius* se asegura que dará precios positivos siempre que, también, el sistema sea productivo, es decir, que todos los bienes y servicios sean iguales o mayores que los medios correspondientes. Igualdad o desigualdad en términos físicos.

Mirando la matriz de productos finales sabremos si estamos en un caso de producción simple o conjunta: si todos los productos finales están solo en la diagonal principal es producción simple; en caso contrario, estamos en la conjunta. En realidad para Sraffa la producción conjunta le sirve de preparación e introducción para los capítulos de la producción con capital fijo y sus análisis del caso de las tierras de labor y de las minas. En efecto, bienes de capital fijo son aquellas mercancías o productos cuyo ciclo de vida es superior al período convencional o real de los bienes de consumo o capital circulante, que se supone no es mayor del año natural. Lo mismo ocurre con la tierra cultivada. Ello provoca que en algunas ecuaciones de definición del sistema de Sraffa se den medios que no aparecen en la misma ecuación como productos finales y viceversa¹⁶. Sraffa, con la ayuda inestimable de los matemáticos que aparecen en el prólogo, consiguió llegar a una formulación o sistemas de ecuaciones donde los bienes de capital fijo aparecen como distintos según la fecha en que son utilizados. Por ejemplo, un vehículo de transporte de mercancías de 5 años de vida es distinto que el mismo vehículo del año anterior, es decir, cuando tenía 4 años. Es lógico que así sea porque la amortización del capital es un fenómeno real que Sraffa recoge en su modelo y que hace que se pueda considerar dos bienes distintos puesto que no podrán, en general, dar las mismas prestaciones o no tendrán, al menos, el mismo riesgo de que se estropeen. Y en cuanto a la tierra, en la medida que es un bien que se utiliza como medio pero que no se produce, es un caso de producción conjunta y, simultáneamente, de bien no básico puesto que sólo interviene en la producción de algunos bienes -los agrícolas- y no en la

¹⁶ El caso de la primera vez que se produce un bien de capital aparece como producto final y no como medio. También el caso de la chatarra que contempla Sraffa.

producción del resto. De ahí que la Tierra y las Minas se consideren, además de bienes de capital fijo, de capital conjunta porque, además del bienes concreto producido –trigo, mineral- se “produce” la tierra o la mina pertinente¹⁷.

En los modelos de producción conjunta de los neoclásicos –las pocas veces que contemplan esa producción– no tienen en cuenta estas sutilezas porque, o lo presentan supuestamente *homogeneizados* con ecuaciones de primer grado, o solo diferenciados de los bienes de consumo. No contemplan, por ejemplo, los sutiles análisis que hace Sraffa en el capítulo IX de su libro, comentando los efectos sobre los precios en los casos en que un bien o servicio es producido de forma diferente por diferentes procesos. Tampoco la Macroeconomía puede contemplarlo porque estas sutilezas se pierden con la agregación. En este caso de producción conjunta –aun cuando no se acepte su teoría del capital fijo– lo revolucionario es su realismo y su imprescindibilidad. Podemos aceptar o no lo del capital fijo, lo de la separación entre bienes básicos y no básicos, pero no se puede, a partir de Sraffa, trabajar solo con la producción simple donde cada proceso produce un solo producto que es distinto de todos los demás. A lo más, por motivos pedagógicos, como preparación de la conjunta, se puede iniciar el análisis con la producción simple. Es lo que hace Sraffa en la I parte de su libro PMpM que titula “Industrias de productos simples y capital circulante”, para luego desembocar en la II parte que llama de “Industrias de productos múltiples y capital fijo”.

V – Algo parecido con lo que podría llamarse teoría de la distribución, que ha tenido mala suerte en la historia del análisis: desde la Fisiocracia no ha existido una teoría de este aspecto de la economía mínimamente solvente¹⁸. Los fisiócratas, mal o bien, con más o menos acierto, asociaron rentas con clases sociales, pero los economistas clásicos fueron sustituyendo lo que podría ser una teoría de la distribución por una de retribución de los factores y asignación de los recursos, cosa distinta aunque relacionada. En Ricardo al menos se asocia rentas de la tierra, salarios y ganancias aún con clases sociales, pero con Marshall todo eso desaparece ante el análisis parcial (*ceteris paribus*); en los marginalistas la preocupación es nula. No hay más que recordar la definición marginalista de qué es la Economía: “es la ciencia de la elección, la ciencia que estudia cómo los recursos son empleados por el hombre para satisfacer sus necesidades, puesto que viven en sociedad”. La más conocida es la Lionel Robbins de que es “la ciencia que estudia el comportamiento

¹⁷ Como el ave Fénix, la tierra resurge del proceso de producción.

¹⁸ No considero que la teoría en agregados de distribución *post-keynesiana* que inicio Kaldor sea suficiente para una teoría de la distribución que exigiría hablar de clases sociales o, al menos, de tendencias históricas. La visión *kaleckiana*, aunque en agregados, tiene más envidia pero, al igual que la obra de Sraffa, ha sido menoscabada de tal manera que no aparece en los libros de texto (ni siquiera en los de nivel intermedio).

humanos como la relación entre unos fines dados y medios escasos que tienen usos alternativos". Y S. Jevons decía que la Economía se ocupa de que "dada una determinada población, con diversas necesidades y fuerzas productivas, que posee determinadas tierras y otras fuentes de materias primas: obtener la manera de utilizar su trabajo de modo que maximice la utilidad del producto"¹⁹. Asignación de recursos pero nada de redistribución. Sraffa aborda el problema de una manera original, pero tampoco tiene una teoría de la distribución propiamente dicha, y eso que para el economista italiano el objeto de la Economía es el estudio del excedente²⁰. Yo añadiría –modestamente– que habría que completar esa definición, sin dejar el libro de Sraffa, diciendo que la Economía es el estudio del excedente... de los bienes reproducibles. De la obra de Sraffa se deduce que la escasez, que tanta importancia tiene para clásicos y marginalistas, no es un factor relevante. Lo novedoso en Sraffa, su visión revolucionaria en lo teórico²¹, es justamente lo contrario y es que establece un reparto del excedente con un grado de libertad. Sraffa, en su modelo simple, parte de este conjunto de ecuaciones:

$$(14) \quad PY = wL + (1 + g)PX$$

$$(15) \quad PY = (1 + R)PX$$

$$(16) \quad P(Y - X)I = 1$$

$$(17) \quad LI = 1$$

La primera ecuación es la de definición de su sistema con salarios *post-factum*; en la segunda se han hecho cero los salarios²², lo que nos da que, si estamos en la producción simple, **R** es a la vez la tasa máxima de ganancia y la razón-patrón de la mercancía-patrón. Y Sraffa toma como numerario el excedente

¹⁹ Recogido en *La Riqueza de las Ideas*, Alessandro Roncaglia.

²⁰ No lo dice así pero se deduce de su obra *Capital*. Quizá no resulte tan evidente que hay que añadir que es el excedente... de los bienes reproducibles. Una andanada más en la línea de flotación contra clásicos y marginalistas puesto que la escasez es esencial en el paradigma neoclásico.

²¹ Aquí no podemos decir que le gana al Marx de su teoría de la explotación, aunque el punto débil del economista alemán es la falta de explicación solvente de por qué iguala las tasas de plusvalía. Inexplicado e innecesario, porque puede considerarse una explotación global, pero Marx dejó las cosas así, y sus epígonos han convertido su obra en un catecismo, incapaces de completarlo, rectificarlo, mejorarlo, etc.

²² No significa eso que no se retribuya a los trabajadores porque eso supondría una economía esclavista, sino que lo que perciben los asalariados entran como medios de producción en pie de igualdad que "el petróleo para las máquinas o los alimentos para el ganado" (Epígrafe 8, cap. II de **PMpm**). Por tanto la variable distributiva que representa **w** es la parte del excedente que va a los asalariados una vez que estos han recibido los medios necesarios para la reproducción del sistema. No obstante Sraffa no aclara demasiado esta cuestión y se presta a interpretaciones.

en términos absolutos y parte también de que los *inputs* de trabajo están dados. Aceptando tomar como numerario el excedente monetario que representa (16), del conjunto de las cuatro ecuaciones anteriores obtiene Sraffa su famosa relación:

$$(18) \quad g = (1 - w)R$$

En realidad (18) es un error derivado de que Sraffa creo que no entendió del todo que es *tomar como numerario* una expresión. Consiste en dividir el conjunto de ecuaciones²³ entre la expresión que se toma como tal. Esto si lo afirma Sraffa de continuo y habla de expresar los salarios en términos de la razón-patrón, por ejemplo. Pero sigue siendo un error por lo siguiente. En primer lugar, del conjunto de las ecuaciones se obtiene:

$$(19) \quad g = \left(1 - \frac{w}{\frac{P(Y-X)I}{LI}}\right)R$$

Y ahora viene una cuestión relevante. Si miramos la ecuación (18), vemos que tanto salarios como ganancias se miden en términos de la razón-patrón **R**, y dado que la razón-patrón mide el excedente relativo ¡no monetario! de la Economía, la relaciones entre ganancias **g** y rentas del trabajo **w** se miden también objetivamente ¡sin relación a los precios! Sin embargo, si miramos la verdadera relación que se obtiene de (19), nos dice que no se pueden medir salarios y ganancias sin calcular ¡simultáneamente! los precios. No obstante la cosa tiene solución -aunque no esté en Sraffa- si añadimos una ecuación que Sraffa nunca consideró explícitamente, aunque la podemos considerar como formando parte de su sistema intelectual:

$$(20) \quad PY = w_m L + PX$$

donde **w_m** es la *tasa máxima de salarios* cuando las ganancias se hacen cero. Ya la hemos visto en otro epígrafe. Del conjunto de las ecuaciones (14), (15) y (16) sale:

²³ No es válido, en general, decir que es dividir las variables entre otra que se toma como tal. En la ecuación de definición del sistema con salario *pre-factum* $PY = (1+g) [wL+PX]$ podemos dividir la ecuación entre un numerario (un precio, el excedente en términos monetarios, etc.) y quedarán afectados los precios **P** y el salario **w**, pero no las ganancias **g**.

$$(21) \quad g = \left(1 - \frac{w}{w_m}\right) R$$

¡Y sin necesidad de tomar ningún numerario! Pero además, de las ecuaciones $PY=(1+R)PX$ y $PY=w_mL+PX$, eliminado los precios, sale la razón-patrón:

$$(22) \quad R = \frac{LX^{-1}(Y-X)I}{LI}$$

donde esta razón-patrón ¡no depende de ninguna variable monetaria! sino del excedente e , indirectamente, de la *productividad global del sistema* al poder escribir (17) como:

$$(23) \quad R = \frac{LX^{-1}YI}{LI} - 1$$

siendo $LX^{-1}Y$ esa productividad global. Que la relación entre la retribución de los factores que se da en (21) dependa de la productividad *global* es uno de los hechos teóricos más importantes y más revolucionarios que se desprende de la obra de Sraffa. Aquí no estamos en el análisis aislado de cada empresa que se deriva del análisis parcial *marshalliano*, sino que lo que nos dice Sraffa implícitamente es que las relaciones intersectoriales son tan importantes que las productividades empresariales no son aisladas, no son solo responsabilidad de cada empresa, porque al comprar bienes y servicios unas empresas a otras también compran sus productividades. Esta visión es absolutamente ajena al marginalismo²⁴. De (21) y (22) obtenemos:

$$(24) \quad g = \left(1 - \frac{w}{w_m}\right) \times \frac{LX^{-1}(Y-X)I}{LI}$$

Y (24) es a la vez la retribución del capital y de las rentas del trabajo, pero con un significativo grado de libertad. La relación entre tasa de ganancia g y tasa de salarios w es decreciente y tiene su límite en R , pero en ningún caso es

²⁴ Claro está que en los modelos marginalistas de equilibrio general, donde todo depende de todo, forzosamente las productividades marginales de las empresas están relacionadas. Pero incluso en estos modelos, en la medida que se trabaja con derivadas parciales para calcular las productividades y su valor, se obvian estas relaciones. Si permanecen es por una mera cuestión matemática en el cálculo de los precios porque, estos, suelen ser soluciones surgidas de los teoremas del punto fijo aplicados al modelo.

determinista porque no puede hallarse una sin apostar por un valor de la otra y viceversa. También es notable que en (24) ¡no intervengan los precios!; además tampoco hay que tomar ningún numerario que distorsionen los valores de las variables distributivas porque haya que calcular simultáneamente precios, salarios y ganancias. Lo revolucionario de Sraffa, lo significativo de la ecuación (18) que nos legó o la que considero correcta y aún más significativa –que es (24)– es que no se puede separar la retribución de los factores porque, como vemos en ambas ecuaciones, ambas variables de la distribución están ligadas, acotadas al excedente R , pero ligadas de manera inexorable y decreciente, de tal manera que si se aumenta una –por ejemplo, las ganancias– los salarios caerán en términos del excedente aunque la economía en su conjunto crezca. Sraffa señaló el camino, pero los epígonos han estado algo torpes porque no se han dedicado a desarrollar su obra sino a simplemente *matematizarla*. Fundamentalmente, con alguna excepción.

Decíamos que Sraffa no tiene tampoco una teoría de la distribución propiamente dicha²⁵ porque falta en su modelo una ecuación que relacione las rentas del trabajo con la renta total o con el valor de la producción agregada final. No se trata de acoplar al modelo de Sraffa una teoría de la demanda²⁶, que tan ajeno y extraño sería a su esquema de pensamiento,

²⁵ Podríamos resumir la diferente actitud en este problema de Sraffa y los marginalistas de la siguiente manera: Sraffa no tiene una teoría de la distribución porque le interesa no caer en un determinismo, mientras que a los marginalistas no les interesa el tema. Esperamos de la apertura de los documentos guardados en el *Trinity College* de Cambridge que arrojen luz sobre el tema de las intenciones de Sraffa sobre la distribución en su modelo de *Producción...*, pero los *esrafianos* están –estamos– en una encrucijada: por un lado queremos respetar el grado de libertad en las variables distributivas porque es esencial al espíritu *esrafiano* pero, por otro, parece imprescindible hacer explícito en el modelo esa relación, aunque sea empírica y no explicativa, entre rentas salariales –que no salarios solo– y producción total agregada. Y sería imprescindible si, a partir de las ecuaciones generalizadas de Sraffa, quisiéramos establecer políticas económicas bajo los supuestos *esrafianos*. Mi opinión es que no debemos caer en un escolasticismo como han caído los marxistas con Marx y, en particular, con su obra capital *El Capital*, valga la redundancia. Respetar y admirar al genio italiano no significa paralizar el desarrollo de su obra ni, por ello, dejar de completar sus ausencias o corregir errores o imprecisiones. No se debe hacer con Sraffa ni con ningún intelectual, por mucha altura que tenga su atalaya. El mismo Sraffa nos dio un ejemplo con David Ricardo, al que admiraba y al que dedicó una parte importante de su vida intelectual y biográfica en la preparación de sus trabajos y su correspondencia (*The Works and Correspondence of David Ricardo*), pero del que se mostró crítico –implícitamente– al seguir más el camino *fisiócrata* que el propiamente *ricardiano*. Y no digamos con Keynes o con el filósofo Wittgenstein, el cual decía que en sus conversaciones con Sraffa se sentía como si “le hubiesen cortado las ramas a un árbol”. Por eso me parece un error tremendo considerar a Sraffa como un economista *post-ricardiano*. Si queremos ponerle un ancestro intelectual habría que decir que es un *post-fisiócrata*.

²⁶ Que no tenga una teoría de la demanda no significa que no tenga en cuenta la demanda. Hay que pensar que los datos de los que parte como son los productos finales (además de los medios de producción e inputs de trabajo) no son inventados, sino que surgen una vez que se ha producido la compra-venta de los productos o la prestación de los servicios a un precio determinado.

pero es imprescindible unir al conjunto de ecuaciones que definen su modelo una ecuación como $wLI = aPYI$, donde a es un parámetro que está comprendido entre cero y uno²⁷. Es imprescindible porque la relación entre ganancias y salarios no sólo tiene su límite en el excedente R sino en la producción global. Ello se debe a que la masa de salarios²⁸ wLI depende de las condiciones sociales –globales- del trabajo y no sólo de la relaciones entre empresarios y trabajadores dentro de cada empresa. Esta omisión consciente del marginalismo como construcción intelectual -y su correlato político que es el neoliberalismo- es lo que ha arruinado intelectualmente toda esta corriente, todo lo que llama el propio Sraffa en el prólogo de su obra capital “el método marginalista”. No es sólo cuestión de método, es cuestión de omisión. Como vemos, Sraffa también omite una relación entre rentas agregadas y producción, pero con (13) o con la aquí calculada (16), prepara el camino no determinista -pero acotado- entre rentas y no sólo entre pagos a los factores según la terminología marginalista. En efecto, w representa *la retribución del trabajo*, pero wLI representa *las rentas del trabajo* que es otra cosa, aunque derivada de lo anterior. Obsérvese que la ecuación $wLI = aPYI$ no define ningún comportamiento desde el lado de la demanda, sino tan solo la constatación de un hecho empírico ineludible.

Así quedarían las ecuaciones de un modelo *esraffiano* desarrollado de la siguiente manera:

$$(25) \quad PY = (1 + g)[wL + PX]$$

$$(26) \quad PY = (1 + g_m)PX$$

$$(27) \quad PY = w_m L + PX$$

$$(28) \quad wLI = aPYI$$

²⁷ I es el vector vertical de unos $nx1$, por lo que PYI puede representar el producto bruto en términos de precios de mercado que nos da el estudio de las macromagnitudes. En el modelo no se incorpora el Sector Público como tal ni el Sector Exterior, aunque ambos pueden considerarse que están implícitos en él. En el caso del sector público no hay dificultad porque Sraffa no hace consideraciones sobre los propietarios o formas jurídicas de productores y consumidores; en el caso exterior podemos considerar que parte de los bienes de la matriz X son importaciones de medios de producción y que parte de los bienes y servicios de la matriz Y se dedican a la exportación.

²⁸ En aras de ese *realismo teórico* que defendemos, aquí podemos sustituir con toda tranquilidad la masa salarial wLI que se obtiene con tasa única de salarios w por la matriz nxn de salarios W haciendo $wLI = LWI$. Entonces podríamos obtener un salario por producto y proceso. O bien un solo salario por proceso y producto si suponemos que estamos en la producción simple porque, en este caso, la matriz W sería diagonal.

En este conjunto de ecuaciones matriciales (vectoriales en este caso) es de reseñar lo siguiente: 1) se consideran los precios como *pre-factum*, es decir, se considera que las ganancias abarcan todos los costes y no solo –como considera Sraffa– los costes de los medios de producción; 2) se ha sustituido la razón-patrón \mathbf{R} por la tasa de ganancia máxima \mathbf{g}_m en nuestro afán de generalizar, porque de esa manera podemos trabajar con la producción conjunta y no sólo con la simple, siendo esta última un caso particular de la primera²⁹. De (26), (27) y (28) surge la ecuación:

$$(29) \quad \frac{w}{w_m} = \frac{a(1+g_m)}{g_m}$$

La tasa de ganancia sale de las ecuaciones (25), (26) y (27):

$$(30) \quad g = \left(\frac{w_m - w}{w_m + wg_m} \right) g_m$$

Y si eliminamos los salarios \mathbf{w} entre las ecuaciones (29) y (30) queda³⁰:

$$(30.1) \quad g = \frac{g_m - a(1+g_m)}{g_m + a(1+g_m)}$$

Y seguimos sin tener una teoría de la distribución³¹, pero sí hemos dado un paso adelante en el modelo *esrafiano*. En la ecuación (22) presentábamos

²⁹ A estas alturas debiera queda claro que una cosa es la diferenciación entre producción simple y producción conjunta y otra cosa es la diferente consideración de los costes según se paguen los salarios *pre-factum* o *post-factum*. Se puede trabajar con cualquiera de las cuatro combinaciones posibles que se derivan de ello.

³⁰ Obsérvese en (30.1) que si la participación de los salarios \mathbf{w} en la producción **PYI** fuera cero (si $\mathbf{a}=0$) ocurriría que $\mathbf{g}=100\%$, sea cual sea la tasa de ganancia máxima \mathbf{g}_m . Recordemos - como hace Sraffa- que los salarios \mathbf{w} son los que permiten a los asalariados participar del excedente y que hay otra parte de los salarios que son los “bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores que entran en el sistema en pie de igualdad con el petróleo para las máquinas o los alimentos para el ganado” (cap. II, epígrafe 8 de *PMpM*). También se cumple en (30.1) que, para que la tasa de ganancia \mathbf{g} sea mayor que cero ha de ocurrir que $\mathbf{a} < \mathbf{g}_m / (1 + \mathbf{g}_m)$, y no solo que fuera menor que uno, que era el supuesto de partida del parámetro \mathbf{a} .

³¹ Y si no somos muy ambiciosos, si bien (30) no representa una teoría de la distribución, sí puede constituir una versión simple de una teoría del reparto del excedente. Sin necesidad de ¡considerar ningún numerario!, la ecuación (30) nos da las ganancias a partir de un salario dado y viceversa. Puede además generalizarse a \mathbf{n}^2 tasas, tanto de ganancias, ganancias máximas, salarios y salarios máximos. Y si sustituimos los salarios \mathbf{w} de (29) en (30) obtenemos las ganancias \mathbf{g} en función de las tasas máximas de ganancia, de las de máximas de salarios y del coeficiente \mathbf{a} de participación \mathbf{a} de los salarios en el producto global.

la razón-patrón como una medida ¡no monetaria! Nos hubiera gustado tener lo mismo para los salarios, pero eso es perseguir una quimera o a Quimera, la diosa de los deseos insatisfechos. Pero al menos tenemos en (24) una relación entre los salarios y su máximo, es decir, los salarios en términos relativos, que son también -aunque como salarios en términos de su máximo w_m -, no dependientes de variables monetarias dado que a es un parámetro y g_m es el excedente en términos no monetarios que ya hemos visto anteriormente³². En cualquier caso este desarrollo -a partir del esquema de Sraffa- nos aleja definitivamente del marginalismo de forma absoluta y radical. Recordar que, según el marginalismo, las ganancias se determinan según el valor de las productividades marginales que se dan en ¡cada empresa para cada trabajador y para cada producto!, sin tener en cuenta, además, para nada la economía en su conjunto. Nada que ver que la retribución de los factores que representan (29) y (30). Aún no tenemos una teoría de la distribución, pero con (24) sabemos con rigor que si aumentan las ganancias porque las condiciones de mercado lo permitan, los salarios disminuirán ineludiblemente³³.

Por supuesto que el modelo definido puede ser generalizado a $n \times n$ tasas de ganancia y a $n \times n$ tasas de salario por las ecuaciones que van de la (25) a la (28), de la misma manera que lo hicimos con la ecuación (4), pero ese intento se sale de las pretensiones del presente artículo.

VI – La mercancía-patrón ha corrido una suerte distinta: creo que no ha sido bien entendida. La razón de ello es que nació con una pretensión y no resultó exactamente lo que se esperaba³⁴. Sraffa trajo de Ricardo el deseo de encontrar una medida invariante del valor del producto, es decir, importó la necesidad de medir la economía, la producción pongamos de un año, de forma independiente de los precios para así saber con certeza que, si los datos estadísticos³⁵ indicaban que la economía crecía, lo hacía porque aumentaba la producción y no porque aumentaban los precios. Pero ante tamaña dificultad, el objeto de estudio fue cambiando sutilmente en Sraffa –y quizá en el propio Ricardo- y nos dice el economista italiano que: “La necesidad de tener que expresar el precio de una mercancía en términos de otra que es elegida arbitrariamente como patrón complica el estudio los movimientos de precios que acompañan a una variación en la distribución. Resulta imposible

³² Si estamos en la producción conjunta no hay más que sustituir la razón-patrón R por la tasa maximiza de ganancia g_m .

³³ Salvo que varíen las condiciones de producción, es decir, salvo que varíen los coeficientes de A que se derivan de la ecuación $X=AY$.

³⁴ Una visión moderna o, al menos, novedosa en su momento, puede verse en *Alcance de la mercancía-patrón de Sraffa. Dos nuevas extensiones*, de E.A. Kliomonsky, 2004.

³⁵ En tiempos de Ricardo el acopio de datos estaba en pañales, no así ya en el primer tercio del siglo XX cuando Sraffa desarrolla su obra o, al menos, la comienza. Hay que recordar al lector no versado que la gestación de *Producción de mercancías por medio de mercancías* le ocupó a Sraffa casi cuatro décadas. Al final se publicó en 1960.

decir, ante cualquier fluctuación particular de precios, si surge como consecuencia de las peculiaridades de la mercancía que está siendo medida, o si surge de las peculiaridades de la mercancía adoptada como patrón de medida³⁶. Pasamos de la dinámica a la estática, de la necesidad de comparar la producción de un año con otro a la de establecer una medida objetiva de la producción en un año; pasamos de intentar una medida objetiva agregada a estudiar los efectos que tiene la medición de un valor de una mercancía respecto a otra en función de los cambios en la distribución. Aún así, bienvenida la problemática y sus posibles soluciones. Esta incidencia de la distribución en la medida objetiva de las mercancías le llevo a Sraffa a considerar que ninguna mercancía podría conseguir tal objetivo llevarle, pero sí podría hacerlo una construcción que hoy llamaríamos *virtual*. En una cesta³⁷ de mercancías en el que se diera la propiedad de que los excedentes relativos de todas las mercancías sería en sí misma una medida objetiva de la economía, pero de esa economía virtual, no de la economía real³⁸. Ni qué decir tiene que Sraffa no emplea las palabras *excedentes relativos* –sería en su inglés correspondiente–, pero su construcción es exactamente eso. Así, una economía en la que se cumpliera lo siguiente:

$$(31) \quad R = \frac{b_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j}}{\sum_{j=1}^n a_{1j}} = \frac{b_2 - \sum_{j=1}^n a_{2j}}{\sum_{j=1}^n a_{2j}} = \dots = \frac{b_n - \sum_{j=1}^n a_{nj}}{\sum_{j=1}^n a_{nj}}$$

donde b_i es el total de cada mercancía producida y a_{ij} el medio de producción i empleado en la producción de la mercancía j , sería una economía que utilizaría como medios de producción en cada una de las fases y procesos de producción la misma proporción de medios en relación a los productos para cada uno de los productos finales. En términos matriciales sería una economía definida por la ecuación:

$$(32) \quad BI = (1 + R)AI$$

donde I es el vector vertical de unos $nx1$.

³⁶ Epígrafe 23 de *PMpM*.

³⁷ Resulta curioso que se haya aceptado sin más que esa cesta tuviera que ser, en términos absolutos, más pequeña que la economía real. Creo que el error viene del propio Sraffa porque nada asegura que esa cesta, es decir, esa mercancía-patrón lo sea. Todo depende del autovector por la derecha de XY^{-1} y el correspondiente autovalor.

³⁸ Dice Sraffa que otra es que existiera una mercancía o un sistema económico en miniatura “dotado de la propiedad de que las diferentes mercancías estén representadas entre sus medios de producción totales en las mismas proporciones en que lo están entre sus productos”, Epígrafe 25, capítulo IV de *PMpM*.

Pero como quiera que la probabilidad de que eso ocurra en el mundo real es cero, Sraffa construyó a través de unos multiplicadores **Q** una ecuación tal como:

$$(33) \quad YQ = (1 + R)XQ$$

haciendo $YI=YQ$ y $XI=XQ$, donde, ya sí, **Y** es la matriz de productos y **X** la de medios surgidos del mundo real. ¿Es cierto que una economía así deja inalterado el valor de la producción global? Es verdad que si ahora *pre-multiplicamos* la (33) por el vector $1 \times n$ de precios **P** nos da esa *mercancía-virtual* como una medida global de la economía, y que si tomamos un precio como numerario –es decir, si dividimos toda la ecuación por el precio de cualquier mercancía–, los precios relativos no varían y tampoco lo hacen los costes relativos de las empresas que emplean medios de producción. Pero ¿esa era la intención de Ricardo³⁹? ¿Era eso también la intención primitiva de Sraffa? Lo dejo todo en el aire, tanto las preguntas como las respuestas. Ahora bien, aunque fueran negativas las respuestas, sí que se ha obtenido algo que no había conseguido David Ricardo. Veamos. Traemos a colación la ecuación de Sraffa que definiría la economía cuando los salarios fueran cero:

$$(34) \quad PY = (1 + g_m)PX$$

La ecuación (34) pertenece al mundo real en la medida que **Y** y **X** son datos extraídos de la realidad. Por otro lado, lo que liga el lado izquierdo de la ecuación -que es el valor del total de cada mercancía producida en el total de la economía con lo equivalente en los medios de producción- es la *tasa de ganancia máxima* g_m según la definición del modelo económico de Sraffa (faltaría la ecuación $PY=wL+(1+g)PX$). Ahora bien, si ahora *pre-multiplicamos* la ecuación (28) por el vector horizontal de precios **P** y, simultáneamente, *post-multiplicamos* la (34) por el vector vertical de multiplicadores **Q** queda, respectivamente, que:

$$(35) \quad P(YQ) = (1 + R)P(XQ)$$

$$(36) \quad (PY)Q = (1 + g_m)(PX)Q$$

Y para que se cumplan ambas ecuaciones -ahora escalares- ha de ocurrir que:

³⁹ Ver el Ensayo de 1815 de D. Ricardo.

(37)

$$R = g_m$$

Y lo conseguido es significativo -por no decir extraordinario- porque lo que nos dice (37) es que la razón-patrón R de un mundo virtual calculado, eso sí, ¡a partir de los datos de la realidad!, coincide con la tasa máxima de ganancia g_m que se corresponde con una ecuación que define el mundo real, mundo que no tiene nada de virtual. Si además sabemos que R es una medida de los valores físicos de Y y de X y que ¡no depende de las variables monetarias! que son los precios P y las variables distributivas ganancias g y salarios w , lo que tenemos es que existe en la economía –al menos en la producción simple– una medida objetiva de ella, aunque no sea la buscada ni la deseada por David Ricardo ni, quizá en origen, por el propio Sraffa. Se ha producido un desplazamiento de lo conseguido en relación con lo deseado. La mercancía-patrón sería el conjunto de vectores formado por YQ , XQ y LQ ; la razón-patrón R quedaría como esa medida objetiva de la economía, razón-patrón que es también el excedente de la economía virtual y, como hemos visto, y también la tasa máxima de ganancia a la que pueden aspirar las empresas en la economía real⁴⁰.

He dejado de lado un hecho que suele ocupar muchas páginas de los estudiosos y epígonos de Sraffa, pero que a mí me parece secundario. Aún así lo abordaré. Tanto en (33) como en (34) tenemos $n+1$ variables pero sólo n ecuaciones. En (33) son n multiplicadores más R y en (34) son los n precios P y g_m . De Sraffa, que sin ser un experto matemático, creo que hay que sacar al menos la conclusión, leyendo su obra, que las entendía perfectamente, añadió una ecuación más a (33) obligando a los multiplicadores que cumplieran además $LQ=1$. Es decir, para Sraffa el escalar derivado del producto de los *inputs* de trabajo L y los multiplicadores Q es el numerario que le permitía igualar ecuaciones e incógnitas⁴¹. En el caso de la ecuación (34) se puede emplear, por ejemplo, que $P(Y-X)I$, es decir, que excedente valga 1 o

⁴⁰ Lo que no se correspondería con el mundo real, evidentemente, sería el vector de precios P , porque este vector se calcularía a partir de las ecuaciones que definen la economía real y que ya hemos visto. En cuanto a las variables distributivas caben varias soluciones: su generalización con matrices nxn o bien, que estas tasas unitarias sean una especie de media ponderada de los valores reales. Pero este tema da para otro artículo e, incluso, para un libro y se entronca con una posible planificación basado en el modelo de Sraffa porque estos precios P podrían ser *precios en la sombra* o *precios indicativos*. Se verá en otro epígrafe del presente artículo.

⁴¹ Si en la producción simple hubiera utilizado el *teorema Perron-Frobenius* no hubiera tenido necesidad de añadir esta ecuación, es decir, $LQ=1$. Lo cual es importante porque si en el modelo parte de que $LI=1$ y añade más tarde la ecuación anterior nos queda una duda: ¿cómo se reparte los *inputs* de trabajo entre los diferentes medios de producción dados por la matriz X ? Y entonces surge el fantasma de la necesidad de una función de producción, aunque no tenga nada que ver con la neoclásica. Este es un problema no resuelto del capítulo de la mercancía-patrón del modelo de Sraffa.

una cantidad fijada de antemano. También se puede emplear cualquier otra magnitud en la que intervenga los precios como pudiera ser \mathbf{PYI} , es decir, la producción total agregada. Ahora bien, la pregunta ahora es inevitable: ¿asegura esto que los precios y los multiplicadores sean todos estrictamente positivos? Sraffa lo razona en el capítulo V de su obra que titula “*Carácter único del sistema patrón*”. Es sin duda el capítulo más difícil de seguir porque, en el fondo, es un intento de demostración del *teorema de Perron-Frobenius*⁴², teorema que es una versión discreta de los teoremas del punto fijo. Sraffa, en su deseo de no *matematizar* el libro con el fin de que no pareciera un libro de economía matemática –como le pasó a Von Neumann-, ¡ni siquiera menciona el teorema!, el cual es imprescindible para asegurar precios y multiplicadores positivos. En Efecto, de (33) sale:

$$(38) \quad \frac{1}{1+R} \mathbf{Q} = (1+R)\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{Q}$$

Y para que \mathbf{R} sea positiva y el vector \mathbf{P} también, ha de ocurrir que la matriz resultante \mathbf{XY}^{-1} cumpla los requisitos del teorema⁴³. No queremos profundizar más en el tema por la intención del presente artículo, pero remitimos al lector al libro de L. Pasinetti *Lecciones de la teoría de la Producción*, donde tiene un estupendo apéndice matemático del teorema y, en general, del álgebra matricial. También de (34) sale:

⁴² Se puede utilizar la programación lineal en lugar del teorema y decir, por ejemplo, que queremos calcular los precios \mathbf{P} y \mathbf{R} en la restricción $\mathbf{PY}=(\mathbf{1}+\mathbf{g}_m)\mathbf{PX}$, estableciendo como función objetivo el escalar del valor agregado de la producción \mathbf{PYI} , porque eso nos acercaría mucho el vector de precios \mathbf{P} calculado con los precios reales. Los resultados obtenidos mediante esta programación, si no quedan grados de libertad, son los mismos, que los derivados de aplicar el teorema Perron-Frobenius. En efecto, eso ocurre porque el algoritmo del simplex que se emplea –o con cualquier otro método– es la búsqueda de un punto fijo que es, a la postre, el autovector correspondiente al autovalor más alto en valor en términos absolutos cuando el problema de programación lineal consiste en hacer cumplir una función objetivo sujeto a una restricción, donde una matriz multiplicada por un vector ha de ser igual a ese mismo vector multiplicado por una constante..

⁴³ Si la Economía es productiva, es decir, si \mathbf{Y} es mayor o igual que \mathbf{X} y las matrices \mathbf{XY}^{-1} y $\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}$ cumplen los requisitos del teorema, tendremos un vector de precios estrictamente positivo que se corresponderá con los autovalores por la izquierda; además tendremos otro autovector por la derecha que será estrictamente positivo y que serán los multiplicadores. Y además ocurrirá que el autovalor de ambos autovectores será el mismo y el de más alto valor de todos los autovalores posibles, que será estrictamente positivo y no repetido. Todos estos requisitos –si cumple además lo de la economía productiva– los cumple la producción simple porque la matriz de de productos finales \mathbf{Y} es una matriz diagonal y su inversa también lo es. Si estamos en la producción conjunta no podemos asegurar nada, ni que existan o que no existan estos autovectores positivos, porque lo normal es que dé algún precio negativo –por grande que sea el excedente del sistema– dado que la inversa de \mathbf{Y} , en este caso, procede de una matriz no diagonal como es \mathbf{Y} .

$$(39) \quad \frac{1}{1+g_m} P = (1+g_m)XY^{-1}$$

Creo que la importancia de esta mercancía-patrón no ha sido valorada porque el modelo de Sraffa trabaja con tasas unitarias de salarios y ganancias, algo muy alejado de la realidad. Pero, aun cuando trabajáramos con tasas múltiples de ambas variables distributivas, se puede buscar el equivalente unitario. Por ejemplo, a partir de la ecuación:

$$(40) \quad PY = L[W \otimes (I + G)] + P[X \otimes (I + G)]$$

Se pueden buscar los equivalentes unitarios g y w utilizando la programación lineal en las ecuaciones:

$$(41) \quad (1+g)PX = P[X \otimes (I + G)]$$

$$(42) \quad (1+g)wL = L[W \otimes (I + G)]$$

Y se podrá hacer fijando como variable objetivo el valor real PYI del año anterior en el que intentáramos calcular el valor de las variables. Mediante programación lineal puede calcularse los n precios P , más la tasa unitaria g , más los n precios P en (36). Ahora bien, entre (40), (41) y (42) tenemos $2n$ ecuaciones linealmente independientes⁴⁴, por lo que una parte de las tasas de ganancia y salarios –que suman $2n^2$ valores- estaría condicionada por las variables anteriores. En su conjunto tendríamos $2n^2-2n-2$ grados de libertad si asumimos que una parte de los valores de W y G no son meros datos.

VII – Enlazando con el epígrafe anterior, creo que nadie de los epígonos de Sraffa se ha dado cuenta de las posibilidades de planificación del modelo económico del economista italiano. Un planificador podría controlar la economía a través de los parámetros de las tasas de ganancia y salarios máximos. Apenas necesitaría más. Y podría respetar absolutamente la fijación de los salarios por las empresas o mercados, de las ganancias y de los precios, pero acotados salarios, ganancias y precios a cumplir las ecuaciones:

$$(43) \quad PY = L[W \otimes (I + G)] + P[X \otimes (I + G)]$$

$$(44) \quad PY = P[X \otimes (1 + G_m)]$$

⁴⁴ La (35) puede ser considerada una combinación lineal de la (36) y la (37).

$$(45) \quad PY = LW_m + PX$$

$$(46) \quad LWI = aPYI$$

Los n precios de P y las $2n^2$ tasas de salario W y ganancias G las fijaría el mercado; el órgano planificador sólo fijaría las tasas de ganancia máximas G_m y los salarios W_m máximos, más el parámetro a de participación del total de las rentas del trabajo en la producción agregada PYI . Sólo le quedaría fijar también los salarios mínimos –si ese fuera su deseo– que no aparecen en el modelo, pero que afectaría a la ecuación (46). Las soluciones para precios, ganancias y salarios serían infinitas porque los grados de libertad son mayor que cero⁴⁵, pero, en todo caso, todos los valores, tanto los de mercado como los fijados por el órgano planificador, deberían cumplir los cuatro sistemas de ecuaciones anteriores. Como se ve una planificación muy distinta de la que nos relata Oskar Lange en su libro *Teoría Económica del Socialismo*, obra desarrollada a partir de un artículo del italiano Enrico Barone y utilizando el instrumental marginalista. Para las corrientes conservadoras la planificación, sea cual sean sus formas, objetivos e instrumentos, es anatema y revolucionario. Considero que la humanidad tendrá tarde o temprano tendrá que planificar a escala global si queremos sobrevivir juntos y en armonía con el planeta, lo cual no tiene nada de revolucionario, y Piero Sraffa nos ha mostrado, sin quererlo, un camino que habría que desbrozar y completar.

VIII – Todas las teorías de la inflación monetaria hasta Sraffa pueden resumirse en dos: aquellas derivadas de la teoría de la cantidad de dinero (por el lado de la oferta) y aquellas derivadas de la demanda de dinero keynesiana. Ambas tienen de común que el dinero y el banco emisor juegan un papel importante –aunque no siempre decisivo– en el control de la inflación en la medida de que este banco tiene el deber de proveer de liquidez a la sociedad a través de los bancos. En el caso keynesiano puede ocurrir con la llamada *trampa de la liquidez* que, si el banco emisor se empeñara en mantener tipos de interés muy bajos, no habría límite en la emisión del dinero con el fin de mantener estos tipos, incidiendo tarde o temprano en los precios y provocando inflación (emitiendo dinero⁴⁶). En el caso de las teorías de la

⁴⁵ Tenemos un total de $3n + 1$ ecuaciones y $4n^2 + 1$ variables, es decir, $4n^2 - 3n$ grados de libertad. De ellos habría que descontar el del salario mínimo. Y eso que estamos suponiendo que el sistema aún se reproduce así mismo en los mismos términos de medios de producción X , productos finales Y y trabajo L . Pero a medio plazo –incluso a la corta– estos valores debieran ser considerados como variables acotadas, con lo cual los grados de libertad aumentarían extraordinariamente.

⁴⁶ Es una posibilidad, pero no siempre ocurre. La política monetaria del BCE actual desde que llegó a la presidencia el Sr. Draghi ha sido la de mantener los tipos bajos emitiendo moneda (al comprar títulos tanto de deuda pública como de empresas privadas) y no por ello se ha producido tensiones inflacionistas en la UE sino todo lo contrario, al menos hasta el presente que redacto este trabajo (segundo semestre de 2017). La inflación depende de muchos

cantidad de dinero juegan un papel elementos como la velocidad de circulación de dinero o el aumento de los precios por causas ajenas al emisor como es, por ejemplo, un aumento de los precios derivado de las situaciones de mercado en la economía. Pues bien, de la obra de Sraffa se deriva otra posible causa ajena a los temas monetarios. En su *apéndice B* de su libro Sraffa contempla la posibilidad de que los precios de los bienes no básicos tendieran al infinito si la tasa de ganancia de estos bienes fuera superior a la tasa de ganancia de los bienes básicos. No entramos en detalle en esto porque no es objeto de estudio específico en este artículo este capítulo de la obra de Sraffa, pero sí que nos ha legado la posibilidad de generalizar este fenómeno que el economista italiano restringe a los bienes no básicos. Veamos como. Definamos la economía -como lo hace Sraffa- de forma simplificada mediante las ecuaciones⁴⁷:

$$(47) \quad PY = (1+r)[PX + wL]$$

$$(48) \quad PY = (1+r_m)PX$$

que no necesitan muchas explicaciones porque ya las hemos visto y analizado en epígrafes anteriores. De estas dos ecuaciones obtenemos la siguiente:

$$(49) \quad P = \frac{(1+r)w}{r_m - r} \times LX^{-1}$$

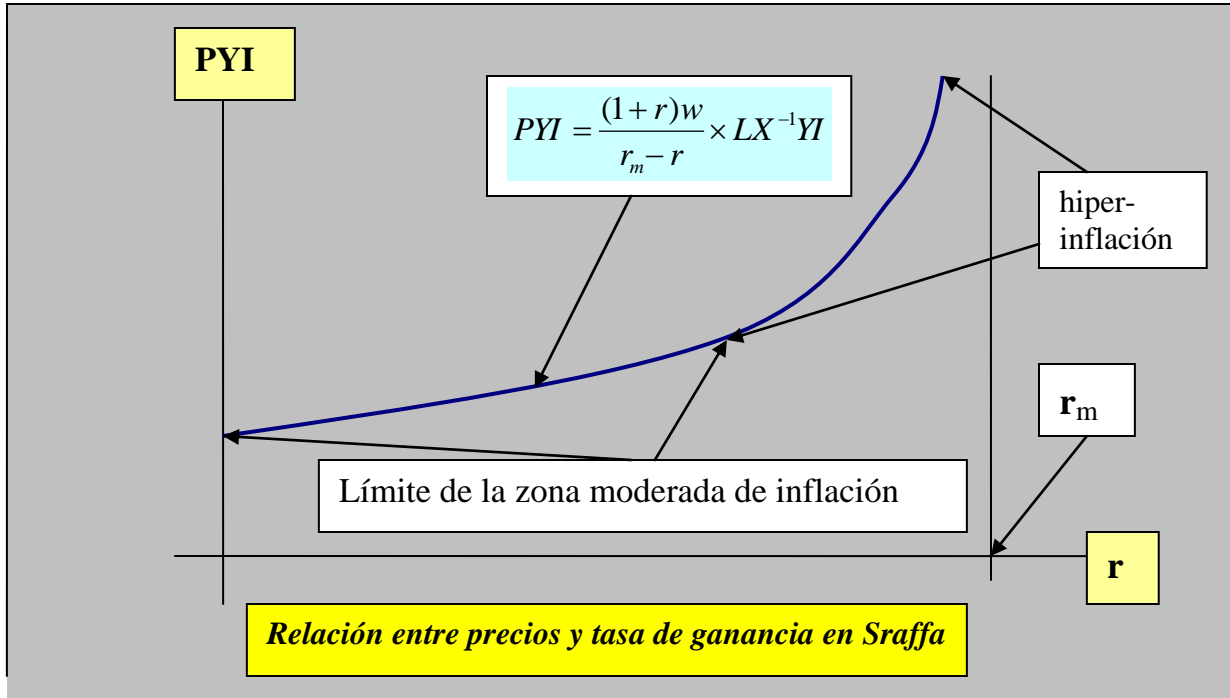
Es un resultado, como se ve, que no sólo afecta a los bienes no básicos sino también a los básicos, suponiendo que se considere importante en el análisis hacer este distingo. En el presente contexto no es necesario hacer tal diferenciación. Pues bien, vemos que si la tasa de ganancia r se acercara a la tasa máxima de ganancia r_m los precios tenderían al infinito. Si se quiere medir el efecto global podemos *post-multiplicar* la ecuación (49) por el vector resultante YI , es decir, por el vector cuyos componentes son el total de bienes y servicios de los diferentes procesos de producción. La ecuación resultante sería:

factores como son el grado de competitividad de los mercados, la velocidad de circulación del dinero, la administración del crédito de los bancos, la demanda de dinero por ciudadanos y empresas, etc. Pero es cierto que los bancos centrales tienen una parte de responsabilidad en el control de la inflación con mayor o menor grado de apertura del grifo del dinero, es decir, de la oferta monetaria al controlar la base monetaria de la misma.

⁴⁷ En este caso hemos utilizado la versión de salarios *pre-factum* en lugar de *post-factum*. El resultado conceptualmente es el mismo y solo cambia que los salarios del modelo van a estar permanentemente multiplicados o divididos (según vayamos de uno a otro modelo) por el factor $(1+g)$.

(50)
$$PYI = \frac{(1+r)w}{r_m - r} \times LX^{-1}YI$$

Y el gráfico correspondiente sería:



El gráfico anterior sería la representación cartesiana de la ecuación (50). Dos cosas son notables de lo anterior: en primer lugar, que no podría achacarse a la política monetaria la posible inflación puesto que no hemos incorporado lo monetario al modelo; en segundo lugar, la sencilla explicación que se deriva de las ecuaciones de Sraffa de esta inflación que podríamos llamar *estructural*. La explicación es esta: se producirá inflación de origen ¡no monetario! en una economía si la naturaleza de los mercados de bienes y servicios son tales que las empresas pueden elevar *las tasas de ganancia* de tal manera que las acerquen a *las tasas máximas*. Y esa posibilidad se agranda si no hubiera en la economía en cuestión suficiente competencia en los mercados más importantes, en los de naturaleza estratégica, o que no evitara, con la política económica, situaciones especulativas como puedan ser las de la construcción o las de la energía. Las causas de ese acercamiento de las tasas de ganancia a la máxima pueden ser muchas y muy diferentes, pero tendrían en común el hecho de que no hubiera barrera legal, institucional, de mercado, estructural, etc., a la tendencia de las empresas a aumentar sus tasas de ganancia. Lo impresionante de este modelo y lo preocupante –aunque no se haya teorizado sobre ello desde la obra de Sraffa– es que el modelo de Sraffa es de una sencillez apabullante por un lado pero, además, muy realista por otro. Una economía cualquiera siempre podrá modelizarse sin apenas restricciones ni

acotaciones mediante este modelo. Además puede generalizarse a múltiples tasas de ganancia y salarios, a la diferenciación explícita entre bienes de consumo y de inversión, a los bienes de capital fijo –sea las del modelo de Sraffa u otros–, al capital conjunto; admite las consideraciones sobre los rendimientos constantes o no, etc. Vemos pues que de este modelo, tan aparentemente inocente de Sraffa, puede obtenerse consecuencias teóricas casi ineludibles que pueden ser contrastadas con la realidad o ser explicativas de ella. Y para este epígrafe ya es suficiente con lo dicho.

IX – Una de las potencialidades de la obra de Sraffa es la de servir de fundamentos a otros análisis de otros autores. Esta tarea nunca es fácil y esa posibilidad se juega más en los conceptos que en las matemáticas. A pesar de esta dificultad vamos a intentar un modelo integrado Keynes-Sraffa en la parte monetaria del economista británico. Vamos a partir de las ecuaciones de Sraffa que definen su modelo con dos peculiaridades: mantenemos las tasas unitarias distributivas de Sraffa y trabajamos con salarios *pre-factum*, es decir, consideramos a los salarios –masa salarial en realidad– formando parte de los costes en aras de lo que hemos llamado *realismo teórico*⁴⁸.

$$(51) \quad PY = (1 + g)[wL + PX]$$

$$(52) \quad PY = (1 + g_m)PX$$

No necesitan más explicaciones ambos sistemas de ecuaciones puesto que son las mismas que hemos venido utilizando en anteriores epígrafes. De Keynes vamos concretar su demanda de dinero por motivos especulativos que expone en su libro *Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero*⁴⁹ mediante la ecuación:

$$(53) \quad M = M_d = \frac{mPYI}{r}$$

donde partimos de un equilibrio entre oferta y demanda ($M=M_d$) y donde suponemos que la oferta de dinero o cantidad de dinero –no se entra a

⁴⁸ Si queremos acercar la Economía a una ciencia –a pesar de ser un conocimiento de lo social– es ineludible aproximarse a la realidad mediante modelos. Es un precio a pagar pero, para que este precio se el menor posible, las hipótesis han de ser lo más realistas posibles a la vez que globales. Por ello no nos vale el análisis parcial de origen *marshalliano* (la caja de herramientas no nos lleva a la ciencia) por su parcialismo ni el *walrasiano* por su falta de realismo.

⁴⁹ Keynes sostiene que los motivos de la demanda de dinero son tres: la derivada de las operaciones corrientes de la economía, el motivo precaución por motivos de seguridad respecto al futuro y, por último, el motivo especulación para la obtención de ganancias en bolsa o fuera de ella.

discutir las teorías monetarias *post-keynesianas* ni la diferenciación conceptual entre oferta y cantidad de dinero– es proporcional a la producción total (\mathbf{PYI}) en términos monetarios e inversamente proporcional a los tipos de interés (representados escalarmente por \mathbf{r}). El parámetro \mathbf{m} lo sería de ajuste a la vez que concretaría la proporcionalidad. Pues bien, del conjunto de las ecuaciones (51), (52) y (53) sale:

$$(54.1) \quad M = \frac{m(1+g)wLX^{-1}YI}{r(g_m - g)}$$

Y si estamos en la producción simple, donde la tasa de ganancia máxima \mathbf{g}_m coincide con la razón-patron \mathbf{R} y dado que en este caso particular $LX^{-1}YI = (1+R)LI$, sale:

$$(54.2) \quad M = \frac{m(1+g)(1+R)wLI}{r(R - g)}$$

La ecuación anterior nos dice que, para que exista equilibrio entre la oferta de dinero \mathbf{M} y su demanda \mathbf{M}_d ha de cumplirse (54.1), es decir, la oferta monetaria ha de ser creciente o puede ser creciente con la productividad global de la economía $LX^{-1}YI$, con la tasa de ganancia \mathbf{g} y con los salarios \mathbf{w} , pero tendrá una relación inversa con la tasa de interés financiera \mathbf{r} (como cabía esperar), inversa también con la tasa máxima de ganancia \mathbf{g}_m .

La relación entre la oferta monetaria \mathbf{M} *keynesiana* (se puede sustituir por el concepto cantidad de dinero bajo una visión más cuantitavista) y la tasa de ganancia *esrafiana* \mathbf{g} es la que cabía esperar si, a su vez, suponemos una relación proporcional o monótona creciente entre esta tasa y la tasa de interés \mathbf{r} *keynesiana*. Estas son las dos dificultades que surgen en este modelo integrado: la relación conceptual –pero con base empírica– entre ambas tasas surgidas de dos modelos absolutamente diferentes –pero no contradictorios– y el papel que pueda jugar la tasa máxima de ganancia que, lógicamente, no juega ninguno en la obra de Keynes puesto que es un invento de Sraffa. Sin entrar en mas pormenores de la relación entre esas tasas que comentamos, podemos conjeturar -en aras de ese *realismo teórico* que postulamos- que esa relación ha de cumplir dos condiciones: primera, que la tasa de ganancia de la economía \mathbf{g} ha de ser mayor que la tasa financiera \mathbf{r} que pertenece al subconjunto de la economía que son las finanzas y, segunda, que la relación entre ambas tasas ha de ser proporcional o monótona creciente. Dejaremos indeterminado el aspecto de la dirección causal de tal relación. Con los criterios anteriores concretamos la relación entre ambas tasas mediante la ecuación:

$$(55) \quad g = [1 + v(t)]r$$

Aquí $v(t)$ sería una variable dependiente del tiempo porque no podemos soslayar que toda tasa de interés tiene una componente temporal, por lo que vamos a suponer que la derivada de $v(t)$ con respecto al tiempo t puede ser tanto positiva como negativa. Con la ecuación (55) la (54.2) quedaría:

$$(56.1) \quad M = \frac{m[1 + (1 + v)r](1 + R)wLI}{r[R - (1 + v)r]}$$

Con las ecuaciones (55) y (54.1) quedaría a su vez:

$$(56.2) \quad M = \frac{m[1 + (1 + v)r]wLX^{-1}YI}{r[g_m - (1 + v)r]}$$

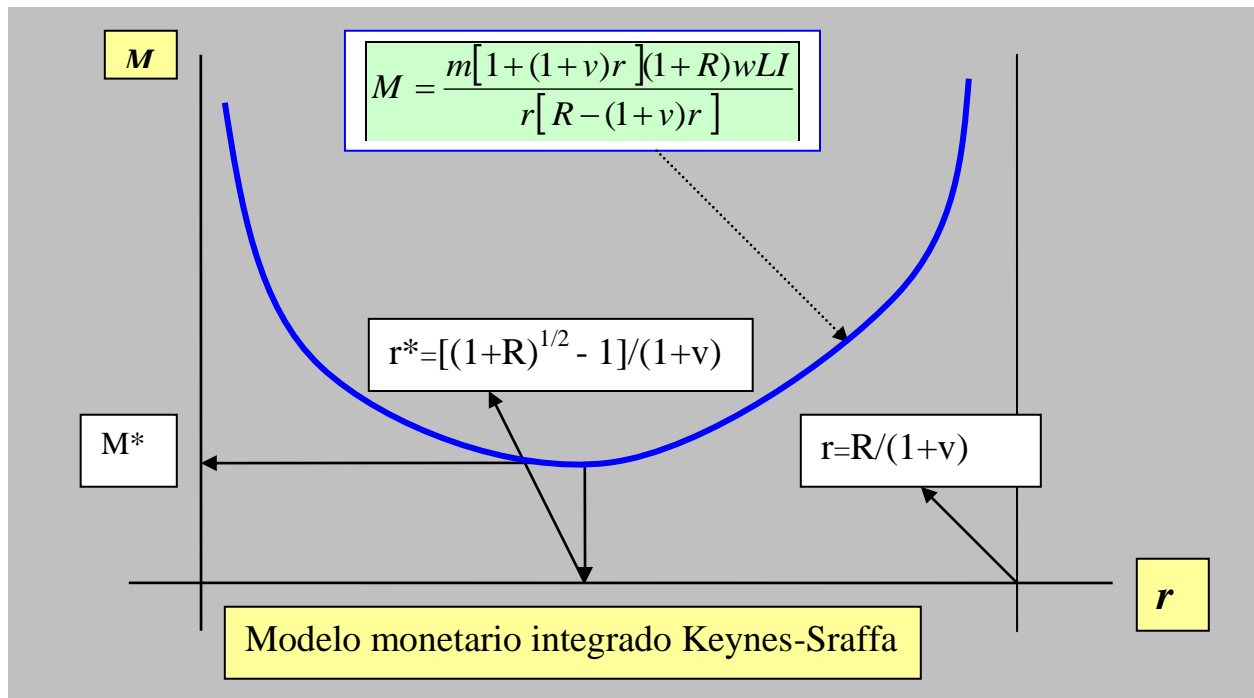
Y en (56) podríamos despejar la tasa de interés monetario r bien directamente⁵⁰, bien con programación lineal⁵¹. Ingenuamente podría pensarse que no hemos avanzado nada respecto a Keynes puesto que se mantiene la relación inversa entre oferta de dinero y tasa de interés monetario, cosa que está en el economista de las *Islas* o que se puede deducir de su obra sin menoscabo de su sistema. Pero no es tal precisamente por el concepto de tasa máxima de ganancia g_m que aporta Sraffa.

Esta tasa, en la producción simple es, nada menos, que el excedente global relativo de la economía R . Y como eso es así, la tasa máxima de ganancia g_m se deriva del excedente en la producción conjunta aunque no sea exactamente el excedente. Dicho de otra forma, en este modelo integrado sabemos cómo relacionar el mundo de las finanzas –que atañe tanto a lo público como a lo privado– con el mundo llamado de la economía real, representada ésta por la tasa máxima de ganancia, que –y esto es lo decisivo–

⁵⁰ No lo hacemos porque queda una complicada ecuación de segundo grado, pero se invita al lector a hacerlo.

⁵¹ En el gráfico que sigue se desvela y se corrige la relación entre la oferta de dinero y los tipos de interés. Hasta el mínimo de la función es la relación tradicional entre ambos, pero a partir de un cierto punto de tipo de interés la relación se hace monótona creciente, cosa que representa bien lo que Keynes llamaba *la trampa de la liquidez*. También representa bien las situaciones de hiperinflación donde, por más que se intenten bajar los tipos de interés a través de la oferta monetaria, se hace inútil y repercute esos aumentos de la oferta monetaria en subidas de precios y no en bajadas de tipos. Es decir, la función y la gráfica representadas serían la versión completa de los problemas monetarios que relacionan los tres conceptos decisivos monetarios: dinero, tipos de interés e inflación. Más no se puede pedir. Pero además se relacionan con la economía real concretada en el excedente en términos físicos a través de la tasa máxima de ganancia g_m .

depende del excedente global en términos de trabajo, es decir, depende de la relación:



(57)
$$R = \frac{LX^{-1}(Y - X)}{LI}$$

Y en (57) están los elementos de la economía real en su interdependencia estructural como son los medios de producción X , los productos finales Y y los *inputs* de trabajo L . Con solo Sraffa nada podemos decir de la parte monetaria de la economía; solo con Keynes no sabemos los límites y condiciones que implica el excedente a través de la tasa máxima; con la integración de ambos mundos conceptuales relacionamos elementos decisivos de la economía: excedente, tipos de interés y dinero.

Podemos complicar y enriquecer lo anterior generalizando a $n \times n$ tasas de ganancia –tanto máximas como de mercado–, añadiendo la ecuación de los precios con tasas de ganancia cero que ya hemos visto, con un modelo de relación entre tasas *sraffianas* y *keynesianas* más complicado o partiendo de una función de demanda de dinero no estrictamente proporcional sino monótona creciente (por ejemplo, logarítmica), pero para el propósito de este trabajo es suficiente⁵² con lo visto hasta ahora.

⁵² El autor de este artículo lo ha hecho a su vez en otro pendiente de publicar aún titulado *Hacia una teoría monetaria Keynes-Sraffa*.

X – Cambiamos ahora de pareja de baile de Sraffa e invitamos a la fiesta a Marx y el problema de la transformación de valores a precios. Vamos a ver cómo el instrumental *esrafiano* (y el teorema Perron-Frobenius) nos va a servir para dar una solución al secular problema. No se pretende en este epígrafe hacer una recopilación de las soluciones⁵³ que se han dado al problema planteado por Marx en su libro III de *El Capital*, sino hacer una crítica a la solución de Marx y dar una solución a la luz del libro de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Sin más preámbulos diré que este problema se divide, al menos, en dos menos dos: 1) el de la conversión de la manera de contabilizar Marx el valor de las mercancías producidas en el modo de producción capitalista en términos de horas de trabajo y su pase a su medición en términos de precios; 2) el problema de transformar el valor creado por el trabajo con el componente de la plusvalía (medida, lógicamente, también en horas de trabajo) en ganancia (medida en unidades monetarias). El primer problema podría reducirse casi a un problema contable, pero el segundo implica una ley de comportamiento del modo de producción que Marx analiza y que resulta más que problemático por no decir cuestionable. No se entra aquí a discutir los conceptos de Marx del capital constante, capital variable, plusvalía, valor de uso, valor de cambio, precio de coste, precio de producción, tasa de plusvalía, tasa de ganancia, etc. Se aceptan tal y como las expuso Marx en su obra *capital*, incluso con sus posibles contradicciones. Nos vamos a limitar a un análisis formal de la solución de Marx, su error, la solución correcta a la luz de la propia idea de Marx de transformación y la comparación de esta solución (la correcta) con la teoría de los precios de Sraffa en su obra ya mencionada.

Se considera que la primera solución al problema de la transformación la dio Bortkiewicz⁵⁴, aunque limitado a tres sectores y tres mercancías. No entramos en su discusión. En cambio sí tendremos en cuenta las soluciones de I. Steedman (*Marx after Sraffa*, 1977) y las de Michio Morishima (*Marx's Economic*, 1973), siendo la que aquí se aporta la más cercana a la discusión entablada por el economista japonés en la obra mencionada. Marx presenta en el libro III, capítulo IX una serie de cuadros de datos con los cuales pretende dar con la solución del problema de transformar el valor de las mercancías del trabajo asalariado en "*precios de las mercancías*".

⁵³ Para un acercamiento al problema puede verse *La realidad de la explotación (La realtà dello sfruttamento*, Garegnani, P., en Rinascita, 1978).

⁵⁴ *Value and Price in the Marxian System*, 1907. Un artículo histórico del problema se puede ver en Internet en: <http://economia.uprrp.edu/notas%20de%20clase%2012.pdf>, con el descriptivo título de: *Un vistazo histórico y metodológico al problema de la transformación de valores a precios de producción*, de Ian J. Seda-Irizarry. No obstante, el propio Bortkiewicz consideró que el primer economista que abordó el problema de forma satisfactoria fue Dmitriev en su artículo *Marx's Fundamental Theoretical Constructions in the Third Volume of Capital*, en 1907. Para M. Dobb, la primera solución del problema para *n* sectores la habría dado Francis Seton en su artículo *The Transformation Problem*, en *Review of Economic Studies*, XXIV, 1956-7.

Traemos a colación el cuadro que presenta Marx con su misma terminología (según la traducción de Wenceslao Roces para el Fondo de Cultura Económica).

	Capital del Constante	Desgaste del Capital	Capital Variable	Plusvalía	Valor	Precio de Coste	Precio (Marx)	Cuota de ganancia (Marx)
	80	50	20	20	90	70	92	31%
	70	51	30	30	111	81	103	27%
	60	51	40	40	131	91	113	24%
	85	40	15	15	70	55	77	40%
	95	10	5	5	20	15	37	147%
Totales	390	202	110	110	422	312	422	35%
Media	78	40,4	22	22	84,4	62,4		

La columna correspondiente a lo que llama Marx *valor* es la suma de las columnas correspondientes al *Desgaste del Capital*, del *Capital variable* y de la *Plusvalía*; en cambio el *Precio de Coste* sería sólo las sumas del *Desgaste del Capital* más el *Capital Variable*. La Plusvalía total es 110 en el ejemplo y, por tanto, la plusvalía media sería 22. Pues bien, Marx calcula el *Precio de producción* ("Precio de Marx") sumando al *precio de coste* esta plusvalía media en todos los sectores. ¿Habría con ello igualado las tasas de ganancia de las distintas mercancías? Este es un requisito para la solución correcta, dado que se supone que la competencia de los capitales va a llevar a esta igualación (al igual que en la economía marginalista). Pues ocurre que, si restamos los precios finales (*Precios de Marx*) de la suma de los correspondientes al *Desgaste del Capital* y al *Capital Variable* y dividimos el resultado por la suma de los dos anteriores, obtenemos la última columna, es decir, la columna correspondiente a las *cuotas de ganancia* que, como puede observarse, ¡no son iguales para ninguna mercancía! Es el propio Marx el que considera que ha dado con la solución correcta creyendo que la tasa de ganancia ¡para todas las mercancías es del 22%! Y se trata de un error aritmético, porque Marx señala el criterio correcto (según su manera de entender) diciendo que "el precio de producción de la mercancía (en el cuadro, *Precio de Marx*) equivale, por tanto, a su precio de coste más la

ganancia general, o lo que es lo mismo, equivale a su precio de costo más la ganancia media"⁵⁵. Es decir, Marx no calcula, de acuerdo con su criterio, correctamente los precios, porque estos precios no llevan a la igualación de las tasas de ganancia. Y aquí ya no estamos en un error aritmético sino conceptual.

Vamos a dar la solución correcta, pero para ello daremos un rodeo y entrar en el núcleo del presente artículo. Una solución correcta debiera cumplir el requisito –que considera Marx en otra parte de su obra– de que el valor total de las mercancías fuera igual en términos de valor-trabajo y en términos de precio. El otro criterio –que también señala en otras partes de su obra– es el de que las sumas totales de ganancia y plusvalía fueran iguales. En el presente artículo no hacemos uso de este último criterio aunque se deduzca en algún momento de las hipótesis previas. Vamos a solucionar un problema previo elemental y es el de que Marx compara los valores con los precios cuando debiera comparar los *valores unitarios* con los precios, porque estos son también unitarios (es decir, son valores y precios por unidad de mercancía). Por ello vamos a presentar la ecuación vectorial de valor de las n mercancías de Marx de la manera siguiente:

$$(58) \quad \mathbf{HY} = \mathbf{C} + \mathbf{V} + \mathbf{S}$$

donde \mathbf{H} es un vector $1 \times n$ de valores de trabajo por unidad de mercancía i , \mathbf{Y} es una matriz (diagonal o no) $n \times n$ mercancías procedente de j sectores (o procesos para acercarnos a Sraffa), \mathbf{C} es un vector $1 \times n$ del capital constante de cada mercancía i , \mathbf{V} otro vector de los $1 \times n$ capitales variables y, por último, \mathbf{S} el vector de plusvalías $1 \times n$ también. Siguiendo a Marx tenemos que calcular *la tasa de plusvalía global* como cociente de la suma de las plusvalías de todas las mercancías i (procedentes de los j sectores) entre la suma de los capitales constantes y variables. Dicho de otra forma, la tasa de plusvalía global vendría dada por:

$$(59) \quad \text{tasa plusvalía global} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i}$$

Esta plusvalía se reparte proporcionalmente a los capitales implicados, es decir, al *precio de coste* (*Desgaste del Capital* más *Capital Variable* del ejemplo). Por ello, la primera transformación de *valores* (unitarios) a *valores transformados* (aún no a precios) vendría dado por:

⁵⁵ Pág. 164 de *El Capital*, libro III, FCE, 1974.

$$(60) \quad J_i \sum_{j=1}^n y_{ij} = C_i + V_i + \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i} \times (C_i + V_i)$$

siendo J_i el valor transformado que buscábamos. Si en (60) sacamos factor común queda:

$$(61) \quad J_i \sum_{j=1}^n y_{ij} = (C_i + V_i) \times \frac{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i}$$

Vamos a llamar M a:

$$(62.1) \quad M = \frac{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i}$$

o bien:

$$(62.2) \quad M = \frac{[C+V+S]I}{[C+V]I}$$

con I como vector vertical de unos. Y (61) en términos matriciales queda:

$$(63.6) \quad JY = M[C+V]$$

Puede comprobarse que si sumamos todos los valores de todas las mercancías de HY (multiplicando este vector por el vector I vertical de unos, es decir, calculando HYI) es igual a JHI , con lo cual ahora ¡también se cumple el criterio de Marx de la igualdad de la suma total de valores antes y después de la transformación!⁵⁶ donde el valor transformado se ha calculado de acuerdo con (61), y donde ¡la tasa de ganancia –ahora sí– es igual para todos los sectores! Si ahora calculamos los valores transformados a partir de los datos que aporta Marx obtenemos:

⁵⁶ También se cumple esta igualdad con el criterio de Marx, pero lo que no se cumple es la igualdad de las tasas de ganancia. Quizá esto es lo que le llevó a Marx a cometer el error comentado a lo largo del artículo.

	Capital Constante	Desgaste del Capital	Capital Variable	Plusvalía	Valor	Precio de Coste	Valores transformados	Cuota d gananci
	80	50	20	20	90	70	94,7	35%
	70	51	30	30	111	81	109,6	35%
	60	51	40	40	131	91	123,1	35%
	85	40	15	15	70	55	74,4	35%
	95	10	5	5	20	15	20,3	35%
Totales	390	202	110	110	422	312	422	35%
Media	78	40,4	22	22	84,4	62,4		

De (63) se obtiene la primera solución correcta de la transformación de valores (unitarios) a valores unitarios transformados (**J**):

$$(64) \quad \mathbf{J} = \mathbf{M}[\mathbf{C} + \mathbf{V}]\mathbf{Y}^{-1}$$

Aún no podemos hablar de precios (como hace Marx) porque el vector $\mathbf{1} \times \mathbf{n}$ de valores transformados **J** viene medido en términos de valor-trabajo marxiano. Para pasar a precios vamos a introducir la ecuación:

$$(65) \quad \frac{1}{w} \times [p_{M1}, \dots, p_{Mn}] = [j_1, \dots, j_n]$$

siendo **w** la tasa de salarios y que permite eliminar de los valores unitarios transformados **j_i** su dimensión valor-trabajo (horas de trabajo). Entre (64) y (65) sale la ecuación vectorial:

$$(66) \quad \mathbf{P}_M = w\mathbf{M}[\mathbf{C} + \mathbf{V}]\mathbf{Y}^{-1}$$

donde **P_M** ya son los precios de Marx, es decir, los precios de producción de Marx, pero correctamente calculados. Llegado a este punto bien podría acabarse el presente trabajo porque el objetivo del cálculo correcto de los precios de producción de Marx ya ha sido efectuado. Es verdad que la solución (66), aunque correcta formalmente y corregida del error del libro III de Marx, presenta el inmenso problema de que aún persisten los valores-trabajo de los medios de producción (el capital constante **C**) y el del capital variable (**V**). La valoración de los medios de producción en términos de valor-trabajo

no es aceptable porque los empresarios compran (venden) estos medios de producción a sus precios (de mercado, tampoco de producción, pero este problema -que es el de la gravitación- no lo tratamos) y no a supuestos valores en término de trabajo, aun cuando ya se hallan transformados correctamente. Por ello es necesario avanzar más, aunque esa dirección suponga hacer algunos supuestos restrictivos. Son los supuestos que hace Marx a lo largo de *El Capital* y en el resto de su obra. Marx supone que las tasas de explotación para las distintas mercaderías son iguales (cosa que ocurre en el ejemplo numérico traído a colación) y que las composiciones orgánicas de capital también son iguales. Desde el punto de vista económico -y aquí sí entramos en una discusión económica- el criterio último de la igualdad de estas composiciones orgánicas resulta inadmisibles, pero aceptamos el criterio de Marx. Ambos criterios se pueden formalizar con las ecuaciones vectoriales:

$$(67) \quad S = eV$$

$$(68) \quad V = k^{-1}C$$

donde e es la tasa de explotación igual para todas las mercancías y k^{-1} la composición orgánica de capital, también igual para todas las mercancías. Si ahora sustituimos (67) y (68) en (63) queda:

$$(69) \quad M = \frac{1 + e + k^{-1}}{1 + k^{-1}} = \frac{1 + (1 + e)k}{1 + k}$$

Un hecho importante en (69) -por lo que ahora viene- es que mientras la tasa de explotación e sea positiva, M es mayor que 1 , lo cual hace que su inversa sea menor que 1 . Si además sustituimos también las ecuaciones (67) y (68) en (64) sale:

$$(70) \quad P_M = w(1 + e + k^{-1})CY^{-1}$$

lo cual hace que (70) sea la tercera solución correcta obtenida con los criterios de Marx, con el añadido de la ecuación (65), que no está en Marx pero que permite pasar, sin pérdida de generalidad, de los valores unitarios (ya transformados) a los precios de producción. Sin embargo aún estamos insatisfechos por la permanencia en (70) del capital constante (en el ejemplo, *desgaste del capital*) que viene medido en términos de horas de trabajo, a diferencia del resto de las variables que vienen medidas bien en valores monetarios (salario y precios) o bien en términos físicos (la inversa de las mercancías finales Y o *productos finales* en terminología esrafiana). Por ello vamos a introducir una ecuación que nos va a permitir eliminar este *desgaste de capital* por su equivalente esrafiano de *medios de producción X*.

$$(71) \quad wC = P_M X$$

No se trata de una ecuación baladí porque, al utilizar los mismos precios P_M para valorar los medios de producción X que los de los productos finales Y (mercancías en Marx), se hace el supuesto de que ya estamos en una situación de equilibrio. Este supuesto es ajeno a Marx, porque nada más lejos del economista alemán que buscar una situación de equilibrio, pero es imprescindible para obtener unos precios que puedan compararse con los precios obtenidos a su vez del modelo *esrafiano*. Si sustituimos (71) en (70) sale algo que resulta familiar en Sraffa:

$$(72) \quad \frac{1}{1+e+k^{-1}} \times P_M = P_M A$$

siendo $A=XY^{-1}$. Si Y es diagonal y (con ello) A positiva -además de irreducible-, en (72) es aplicable el teorema de Perron-Frobenius (el escalar que multiplica a P_M es menor que 1). Pero si aplicamos el teorema a (72), el autovalor que asegure ese vector P_M de precios positivo es único. Llamemos $a_{PF}(A)$ a dicho autovalor. Para ello ha de cumplir la igualdad:

$$(73) \quad a_{PF}(A) = \frac{1}{1+e+k^{-1}}$$

Y la ecuación (73) resulta nefasta para la solución del problema de la transformación –incluso la correcta obtenida a partir del criterio de Marx– porque nos dice que solo por casualidad existirá una estructura económica capaz de ser compatible con un conjunto de precios positivos. Esa estructura sería aquella tal que los capitales constante, variable y plusvalía estuvieran en relación entre sí de tal forma que cumplieran (73). Es verdad que estamos en el caso particular de una situación de equilibrio –recordar la ecuación de equilibrio (71)–, pero tampoco asegura ese vector de precios positivo una situación de desequilibrio. No supone esto dar la razón a los Böhm-Bawerk (señalando la incoherencia de la teoría del valor de Marx) o de Von Mises (señalando la imposibilidad de una planificación socialista). Significa sólo que son incompatibles dos de las leyes que estableció Marx: la de la igualdad de las tasas de plusvalía y la de la igualdad de las composiciones orgánicas de capital con una tercera condición (que obviamente no podía estar en Marx) que es una solución de precios de equilibrio y positivos surgida por la posibilidad de aplicar Perron-Frobenius. Yo creo inaceptable la segunda y tengo dudas de si la primera –la de plusvalía– es una ley económica o una mera definición, más allá de las intenciones de Marx, porque con meras intenciones –incluso loables– no se construye la ciencia. En cualquier caso este

es otro problema, pero con (73) y con las condiciones –ecuaciones– señaladas, queda claro lo que es admisible en principio en Marx y lo que no lo es. A resultados análogos se llega con cadenas de Markov.

Partimos ahora de la ecuación de definición del sistema económico de Sraffa con salarios *post-factum* tal como:

$$(74) \quad P_S Y = wL + (1 + g)P_S X$$

Sraffa hace ahora cero la tasa de salarios w , convirtiéndose la tasa de ganancia r en tasa máxima g_m . Pero además, si Y es diagonal, es decir, si estamos en la producción simple, esta tasa máxima es la razón-patrón R que mide el excedente relativo de todas las mercancías que corresponde a la mercancía-patrón. Por ello la ecuación (74) se convierte en:

$$(75) \quad P_S Y = (1 + R)P_S X$$

Tenemos en (72) los precios de producción de Marx (P_M) y en (75) los precios de Sraffa (P_S). Si ahora hacemos que ambos precios sean iguales, es decir, si:

$$(76) \quad \text{si } P_M = P_S \Leftrightarrow (1 + e) = Rk$$

Es decir, la condición necesaria y suficiente para que los precios de Marx y Sraffa sean iguales es que se cumpla (76). Con lo cual obtenemos una conclusión que no podíamos prever al comienzo del artículo: que la solución buscada por Marx (incluso la subsanada del error de Marx) de la transformación de valores a precios es precisamente la de los precios de los que parte Sraffa con la mercancía-patrón en su modelo de producción simple y de precios de equilibrio⁵⁷. No significa ello que el análisis de Marx sea baldío como pretendía el economista Böhm-Bawerk⁵⁸ creyendo que una mala solución de Marx en el problema de la transformación de valores a precios arruinaba todo su sistema. Lo que se aporta en el presente artículo son las condiciones que han de cumplirse en el sistema de Marx y de Sraffa para llegar a (76). Han de cumplirse las *¿leyes?* de Marx sobre las tasas de explotación (67) y de la composición orgánica de capital (68), la que

⁵⁷ A esta misma formulación llega Steedman en *Marx after Sraffa (Marx, Sraffa y el problema de la transformación)*, FCE, pág. 122), aunque por distinto camino.

⁵⁸ *K. Marx and the Close of his System*, 1949. Para ser justos, también considera ese autor errónea o sin sentido la teoría del valor-trabajo de Marx, sin tener en cuenta que esta teoría pueda ser considerada como una mera *contabilización* del valor de las cosas (mercaderías), lo cual no anularía la teoría de la explotación (o teoría de la plusvalía) del economista germano. Al menos por este problema.

relaciona valores transformados con precios a través de la tasa de salarios (65) y la de los precios de equilibrio entre productos finales y medios (71); de Sraffa, la de la transformación de su sistema de producción simple en un sistema de mercancía-patrón (75). De (76) podemos concluir que, en lo que a precios se refiere, donde acaba Marx comienza Sraffa, aun cuando sus intenciones y sus mundos conceptuales sean distintos.

De no aceptar que los precios P_M en (71) sean los mismos que en (70) porque no se tenga la intención de encontrar esos precios de equilibrio como solución al problema de la transformación, se puede considerar que los precios en (71) son de una fecha posterior a los precios en (71) y el resultado es:

$$(77) \quad P_{M(t+1)} = [1 + e + k^{-1}] P_{M(t)} A$$

que es la quinta solución al problema, esta vez sin equilibrio, pero que podrían llevar al mismo según fueran los valores de e , k y A .

Marx abordó el secular el problema de pasar de los valores a los precios en su libro *El Capital* y fracasó porque se equivocó en el planteamiento aritmético y en el conceptual. No podía ser de otra forma por dos motivos: Marx se empeñó en partir de los valores porque situó la teoría de la explotación en el corazón de su análisis económico y creyó –creo que equivocadamente, pero es discutible– que esa teoría debía partir del nivel de abstracción que daban los valores basados en la teoría del valor-trabajo y su diferenciación entre valor del trabajo y valor de la fuerza de trabajo. No se dio cuenta que en una sociedad la población consumidora era mayor que la población asalariado y eso lleva a una teoría de la explotación que, aritméticamente, no es distinguible de la teoría que él defendía basada en la capacidad del empresario de extraer la plusvalía de la fuerza de trabajo. Sraffa saltó por encima de esta metafísica y partió de una teoría de los costes basada en los precios y en las relaciones de interdependencia de la economía. Eso le daba unas ecuaciones de precios oportunas para llevar a cabo la transformación. Marx no podía dar con una solución incluso si hubiera advertido del problema anterior porque necesitaba un teorema –o las cadenas de Markov o la programación lineal– que se demostró en los primeros años del siglo XX cuando el revolucionario alemán llevaba más de 20 años muerto. Sraffa aporta las ecuaciones, pero no consideró que el problema fuera relevante para incluirlo en su libro *capital* ni para preocuparse de él⁵⁹. Lástima, porque le faltó integrar sus ecuaciones con la de Marx y aplicar –y para Sraffa era también un problema– el teorema Perron-Frobenius. Era un problema porque

⁵⁹ Cualquier consideración sobre las intenciones y preocupaciones de Sraffa respecto a su obra queda pendiente de lo que pueda surgir del estudio de la Correspondencia que obra en el *Trinity College* de Cambridge.

Sraffa huyó de la matematización de su obra como de la peste a pesar de los excelentes matemáticos que le asesoraron. La solución que se ha aportado en un ejemplo de cómo los fundamentos del análisis de Sraffa –ecuación de costes, interdependencia, capital como trabajo fechado– sirven para solucionar un problema que Marx lo elevó desde el terrenal A. Smith a al cielo de la metafísica hegeliana.

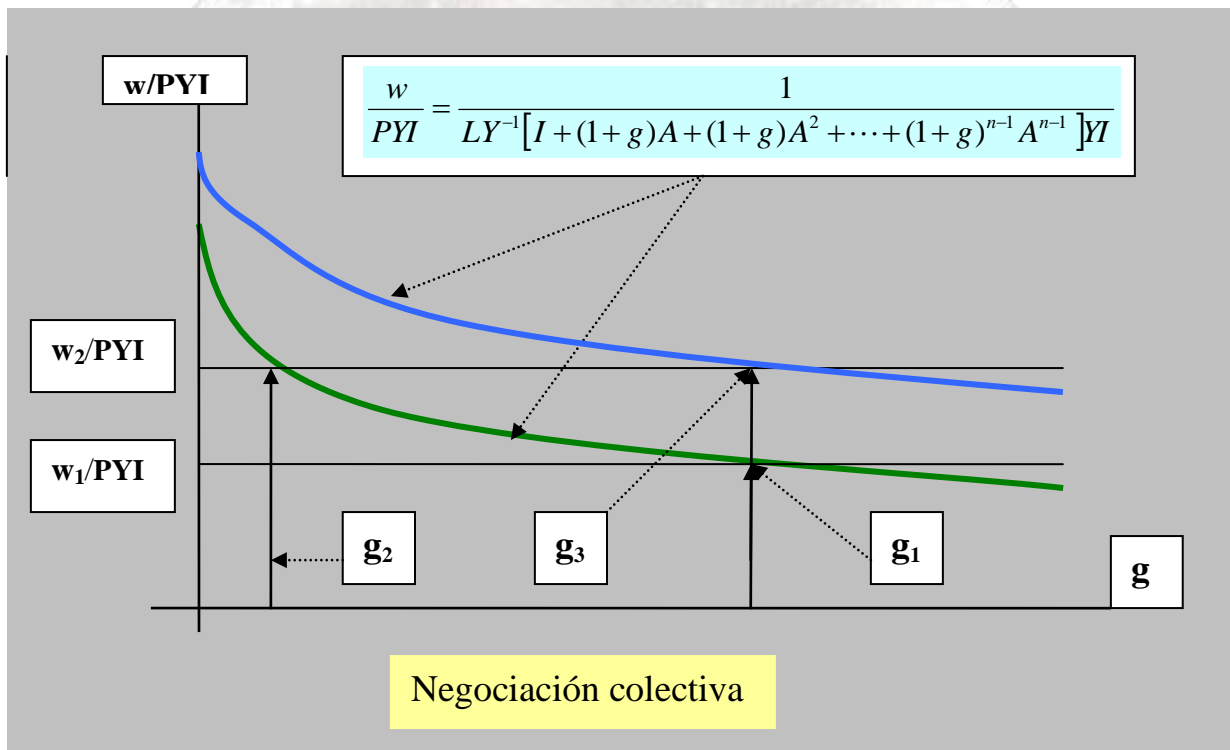
XI – Sraffa distinguió entre bienes básicos y no básicos, siendo los primeros los que entraban como medio en todos los productos finales y no básicos los que no cumplían ese requisito. Esa distinción la hace en el capítulo II (*Producción con excedente*), pero en capítulos posteriores lo amplió de dos maneras: a un tercer sector que debía *interconectar* entre unos bienes y otros, y a la consideración de que los bienes no básicos sí podían depender de sí mismos (es decir, que para ellos eran básicos). Esto lo dice en el capítulo VIII (*El sistema patrón con producción conjunta*). Y había un tercer motivo que anulaba esa dicotomía: porque no era necesario que todos los bienes que se consideraban básicos entraran en todos los demás como medio. En realidad bastaba con que entrara en uno (salvo que fuera no básico que entrara en uno no básico). Esto no está en Sraffa. Hasta que llegó *Producción de mercancías por medio de mercancías* los bienes que diferenciaban según su consumo en bienes de consumo y bienes de lujo. Sraffa cambia el punto de vista y lo sitúa en la producción. Esta distinción conceptual tiene su consecuencia operativa: que los precios de los bienes no básicos dependen de los básicos y de los no básicos pero los precios de los bienes básicos dependen sólo de sí mismos. Eso crea una economía dual en el que determinados bienes (los básicos), en un equilibrio de precios, no son influidos por la economía de los no básicos ni para formar los precios ni para determinar las tasas de salario y de ganancias. Es verdad que esta distinción es significativa para el caso particular de la producción simple y con tasas unitarias, pero puede generalizarse a múltiples tasas.

Y hay algo más con esa distinción: si no existen los bienes interdependientes entre básicos y no básicos nos encontraríamos con una economía tan dual que no tendrían en principio relación entre un sector y otro. Eso nos da una teoría del comercio internacional, porque una economía sin bienes interdependientes entre bienes básicos y no básicos es equivalente a dos economías separadas por los precios pero unidas, por ejemplo, por las tasas de ganancia y de salarios⁶⁰.

⁶⁰ Aunque en las dos economías hipotéticas todos los bienes y servicios fueran bienes básicos para cada país (pero no para ambas a la vez) sí tendrían –o tenderían a ello– tasas de ganancia y de salarios iguales dado un tipo de cambio, el cual se formaría por el equilibrio de la balanza de pagos de los bienes comerciados entre ellos una vez producidos. Esto nos da una teoría del comercio muy distinta de la de los costes comparativos de David Ricardo. Una potencialidad más del legado de la obra de Sraffa.

XII – Otra de las potencialidades no explotadas es el análisis de las relaciones laborales. Ya hemos visto en el análisis de la teoría del capital que se deriva del modelo de Sraffa pero, simultáneamente, con ello puede servir para analizar las relaciones entre salarios y ganancias en el ámbito de lo que, en España, se llama *la negociación colectiva*. Traemos aquí la ecuación (12) del epígrafe III y un gráfico que indica la relación entre los salarios w y la tasa de ganancia de la economía g :

$$(78) \quad \frac{w}{PYI} = \frac{1}{LY^{-1}[I + (1+g)A + (1+g)A^2 + \dots + (1+g)^{n-1}A^{n-1}]YI}$$



Supongamos que la economía venga definida por el modelo derivado de la ecuación (78) y que los salarios y las ganancias sean respectivamente w_1/PYI y g_1 . Si los trabajadores, fruto de su presión y de su capacidad negociadora, logran llevar los salarios al punto w_2/PYI , las ganancias de las empresas bajarán al punto g_2 . Ahora, si los empresarios quieren restituir las ganancias que tenían originalmente en g_1 podrán hacerlo de varias maneras: 1) Podrán modificar la organización de las empresas o aumentando la productividad, es decir, podrán hacerlo variando la matriz de requerimientos A que indica la relación entre los medios de producción X y la de productos finales Y mediante $X=AY$; 2) Podrán mejorar –o compensar la pérdida de la tasa de ganancia g – a través del sistema financiero si logran de este subsistema económico una bajada de los tipos de interés. Aquí jugará un papel fundamental la política

monetaria de los bancos centrales incidiendo en la oferta monetaria. Suponemos que parte de la tasa de ganancia corresponde a los tipos de interés pagados por las empresas por los créditos obtenidos por el sistema financiero. Es verdad que esta política puede dar lugar en determinadas circunstancias a un aumento de los precios que podría compensar lo obtenido por la bajada de los tipos de interés de tal manera que los tipos reales se mantuvieran constantes. Estos son los límites consabidos de la política monetaria; 3) También existe la posibilidad de aumentar la productividad del trabajo mediante LY^{-1} , que es precisamente la inversa de la productividad laboral, que puede ir acompañado o no del cambio en la matriz A que hemos visto en el primer punto⁶¹. Puede contemplarse otros aspectos que incidan en la negociación pero, en este caso, si las empresas quieren restaurar las tasas de ganancias anteriores –supuesta la relación inversa entre salarios y ganancias que se da en la ecuación (78)– sólo podrán restaurar sus ganancias desplazando⁶² la ecuación hacia arriba.

Complementariamente con lo anterior vamos a desarrollar algo que, no está en Sraffa, pero que puede considerar *esraffiano* en esta pretensión de este autor de la necesidad de no convertir la obra del economista italiano en un catecismo escrito e interpretado de una vez para siempre. Partimos, como en el epígrafe V, del siguiente sistema de ecuaciones que modelizan la economía real.

$$(79) \quad PY = (1 + g)[wL + PX]$$

$$(80) \quad PY = (1 + g_m)PX$$

$$(81) \quad PY = w_m L + PX$$

$$(82) \quad wLI = aPYI$$

De (79), (80) y (81) obtenemos dos como sigue:

$$(83) \quad \frac{w}{w_m} = \left(1 - \frac{g}{g_m}\right) \left(\frac{1}{1 + g}\right)$$

$$(84) \quad g_m = \frac{LX^{-1}(Y-X)I}{LI} = \frac{P(Y-X)I}{PXI}$$

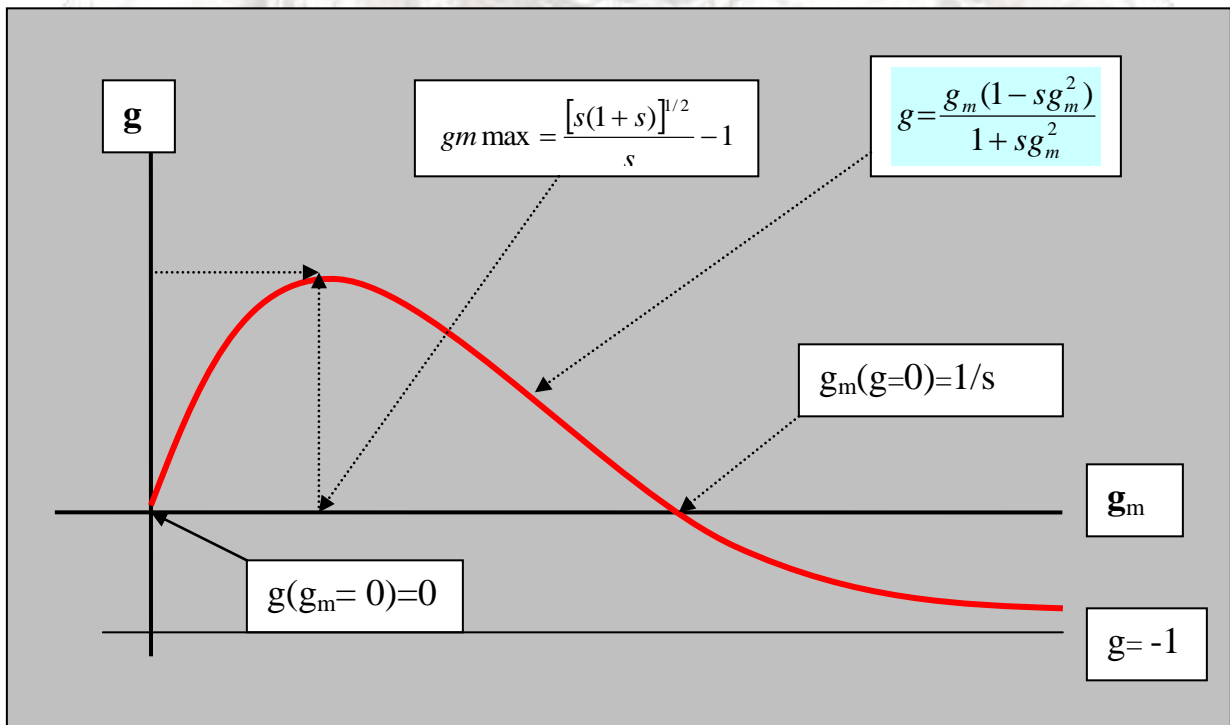
⁶¹ Para decir algo sobre la relación entre medios, productos y trabajo, pero esto exigiría algo parecido a una función de producción (Leontief la supone lineal para su modelo), aspecto sobre lo que Sraffa se mostró absolutamente reacio a la vista de *PMpM*.

⁶² Aquí volvemos a la diferenciación ya clásica entre *deslizamiento* a lo largo de una curva y *desplazamiento* de la misma.

La ecuación (83) es la de Sraffa con dos matices: se ha obtenido con salarios *pre-factum* en lugar de los salarios *post-factum* esrafianos, y la tasa máxima de ganancia⁶³ g_m en términos monetarios se obtiene a partir de la (80) despejando esta tasa⁶⁴ ($g_m = P(Y-X)I/PXI$). Pero Sraffa nunca consideró alguna relación que afectara a la distribución como hemos hecho en otro epígrafe con $wI = aPYI$ o bien, como en este caso, que vamos a suponer que los asalariados consiguen imponer una senda de crecimiento de los salarios relativos (en términos de los salarios máximos) tal como:

(85)
$$\frac{w}{w_m} = s g_m$$

Es decir, los salarios relativos w/w_m crecen proporcionalmente a lo que lo hace el excedente global g_m . Hay que recordar que detrás de este excedente está la productividad global del trabajo $LX^{-1}YI$ de acuerdo con (86):



⁶³ Estamos en la producción conjunta pero, si contemplamos el caso particular de la producción simple *esrafiana*, la tasa máxima de ganancia g_m es a la vez la razón-patrón R .

⁶⁴ Si estamos en la producción simple la fórmula (83) es correcta porque, en este caso, $g_m=R$. En cambio si estamos en la producción conjunta necesariamente ha de suponerse (84).

$$(86) \quad g_m = \frac{LX^{-1}(Y-X)I}{LI} = \frac{LX^{-1}Y}{LI} - 1$$

El supuesto es muy razonable y participa a la vez de la teoría de la retribución de los factores (en lenguaje neoclásico) como de la distribución de la renta (en la medida que tomamos el excedente como variable exógena). Pues bien, si ahora eliminamos el salario relativo w/w_m entre la ecuaciones (83) y (85) queda:

$$(87) \quad g = \frac{g_m(1 - sg_m)}{1 + sg_m^2}$$

Esta ecuación es verdaderamente notable y sorprendente. Arriba hemos dibujado su gráfica. Cabía pensar intuitivamente que a medida que aumentara el excedente relativo, es decir, g_m (también tasa máxima de ganancia), las ganancias g de las empresas deberían crecer siempre. Y lo hacen pero hasta un valor de g_m , a partir del cual ¡la tasa de ganancia disminuye a pesar de que aumente el excedente! Y además lo hace sea cual sea los salarios w : solo el cociente w/w_m debe permanecer constante y proporcional al excedente. Esto demuestra la preferencia de los empresarios en deprimir los salarios –a pesar de su nefasto incidencia sobre el Consumo y, por tanto, la demanda agregada– a la de aumentar el excedente aumentando la productividad del sistema (tanto la tecnológica, variando A , como la laboral, variando LY^{-1}). Lo sorprendente de lo anterior es que surge con ecuaciones que definen el sistema, que son sencillas y difícilmente contestables. Un aspecto más del modelo de Sraffa que, desarrollado con supuestos razonables, nos muestra lo revolucionario de que quehacer teórico en *PMpM*.

Nota final. Lo revolucionario, en primer lugar, en la teoría de Sraffa no es un aspecto importante de su obra, un cambio radical de un paradigma, una conquista intelectual en los diversos aspectos que se bifurca en el análisis económico, sino el conjunto de todos estos aspectos de su obra y alguno más que se podría incluir. En segundo lugar y efecto lateral de lo anterior, el modelo de Sraffa no es suficiente para explicar todos los fenómenos que podemos considerar económicos, pero sí supone una alternativa a los fundamentos microeconómicos. En efecto, no tiene Sraffa una teoría del consumo, de la inversión, de la distribución o del crecimiento –para poner ejemplos–, pero puede dotar de fundamentos a todas estas teorías o análisis. Sraffa sería la prueba del algodón de cualquier teoría o aspecto de una teoría para verificar su posible viabilidad: si es compatible con los fundamentos

*esrafianos*⁶⁵ estamos ante un análisis que ha pasado la condición necesaria (la suficiente sería la contrastación empírica). Sraffa es al menos compatible con Keynes, Kalecki, Marx, y no lo es, en general, con el marginalismo, porque ambas tienen una explicación sobre la formación de los precios y de retribución de los factores -en terminología neoclásica- absolutamente incompatibles. A pesar de ello y en la medida que Sraffa no tiene una teoría de los mercados ha de buscarse su compatibilidad siempre que no se utilice lo marginal como explicación. Las variaciones en el margen de las variables son incompatibles con el análisis estructural de las relaciones que establece Sraffa entre medios y productos finales por un lado, y formación de los precios, salarios y ganancias, por otro. Ya hemos visto que los precios se forman, según Sraffa, como un margen sobre los costes y no como el nivel de producción que iguala costes marginales a los ingresos marginales -o precios en el caso de la competencia perfecta-. Eso, por sí solo, hacen incompatible a Sraffa y el marginalismo. Eso y la teoría del capital; eso y la producción conjunta *esrafiana*, eso y la consideración del capital como trabajo fechado.

Pero no basta lo que dejó Sraffa hecho a pesar de ser enorme. Hay que desarrollar a Sraffa, completarlo, complementarlo, integrarlo. Aquí se ha hecho -y esa ha sido la pretensión de los desarrollos del autor de este artículo- con las tasas unitarias de salarios y ganancias para generalizarse según que estemos analizando, lo hemos hecho haciendo explícitos los bienes de consumo, tomando los salarios como *pre-factum* en aras de lo que podríamos llamar *realismo teórico*, integrando a Sraffa con Keynes⁶⁶, surgiendo de su obra modelos sobre negociación colectiva, de comercio internacional, etc. Los fundamentos tradicionales están heridos de muerte por varios motivos: su inconsistencia (teoría del capital), su incapacidad de analizar y prever las crisis económicas, su inoperancia para dotar de instrumentar analítico a los políticos que estén dispuestos a combatir las crisis. Desde una perspectiva *esrafiana*, el análisis económico de la formación de los precios y de asignación de los recursos -salvamos parcialmente la teoría de los mercados- parece más la alquimia y la astrología del análisis que los fundamentos del mismo, siendo Sraffa el Galileo que pone los rudimentos del análisis. Pero, eso sí, falta el Newton que lo desarrolle.

⁶⁵ Los que aparecen en el libro y los que podamos desarrollar sin perder su esencia.

⁶⁶ Lo mismo se podría hacer con Marx para su teoría de la reproducción y acumulación o resolviendo correctamente el problema secular de la transformación de valores a precios (que hemos visto en anteriores epígrafes).

Bibliografía

Afriat, S.N.: "Sraffa's Prices" (*Sraffa or An Alternative Economics*, 2008, Palgrave Macmillan, págs. 45-67, New York,).

Abraham-Frois, G y Berrebi, E.: "Theory of Value, Prices and Accumulation", 1979, Cambridge U. Press, Cambridge, UK.

Ahijado, M.: "Distribución, precios de producción y crecimiento", 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces, Barcelona.

Ahijado, M.: "Piero Sraffa: notas para una biografía intelectual", 1985, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces, Barcelona.

Andrews, D.: "Adam Smith's Natural Prices, the Gravitation Metaphor, and the Purposes of Nature", 2014, Department of Economics, State University of New York, USA, internet: david.andrews@oswego.edu

Assous, M. y Gallardo, J.L.: "Génesis y Originalidad de la Teoría de Kalecki", 2008, revista Circus, UBA, Buenos Aires.

Azcurrea, H.: "La Teoría de la Distribución del Ingreso de Kalecki", revista Circus, 2008, UBA, Buenos Aires.

Balasko, Y.: "General Equilibrium Theory of Value", 2011, Princeton University Press, UK.

Ballesteros, E.: "Introducción a la teoría económica", 1988, Alianza Universidad. Textos.

Bandyopadhyay, P.: "Critique of Wright 2. In Defense of a Post-Sraffian Approach", 1981, en Steedman et al., *The Value Controversy*, págs. 100-129, Londres.

Barceló, A. y Sánchez, J.: "Teoría económica de los bienes autorreproducibles", 1988, Edit. Oikos-Tau.

Barceló, A.: "Piero Sraffa, tres caricaturas y una moraleja", 1989, *Revista de Economía*, n. 13, págs. 109 y siguientes).

Bellafiore, R.: "Sraffa after Marx" (*Sraffa or An Alternative Economics*, 2008, Palgrave Macmillan, págs. 68-92, New York).

Bellafiore, R. y Carter, S.: "Towards a new understanding of Sraffa: insight from archival research", 2014, edit. Palgrave MacMillan, New York.

Bidard, Ch., Poulon, F., Hendaoui, F.: "Keynes & Sraffa", 1998, Editor: Cujas.

Blanchard, O.: "Macroeconomía", 2000, edit. Prentice-Hall, (*Macroeconomics*, 2000).

Bowles, S.: "Technical changes and the profit rates: a simple Prof. of the Okishio theorem" (*Cambridge Journal of Economics*, 1981, vol. 5, págs. 183-186), Cambridge UK, Internet:
<http://xa.yimg.com/kq/groups/17814176/2079181558/name/Bowles%20-%20Okishio%20demostracion.pdf>

Caballero, A. y Lluch, E.: "Sraffa en España", 1986, *Investigaciones Económicas* (2ª época, vol. X, n.º 2).

Caballero, A.: "La teoría del excedente: Marx después de Sraffa", 1979, revista *En Teoría*, n. 4, edit. Zona Abierta Editores.

Carter, S., Davis, J., Naldi, N., Lattanzi, E., Schefold, B., Lazzarini, A. Brondino, G., Morra, L.: *Research in the History of Economic Thought and Methodology*, 2017, (Including a Symposium on New Directions in Sraffa Scholarship, Volume 35B), edited by Scott Carter and Riccardo Bellofiore, Editor: Emerald Publishing Limited

Chodi, G.: "Beyond Capitalism: Sraffa's Economic Theory" (*Sraffa or An Alternative Economics*, 2008, Palgrave Macmillan, págs. 187-198, New York).

Cozzi, T., Marchionatti, R.: "Piero Sraffa's Political Economy: A Centenary Estimate" (Routledge Studies in the History of Economics), 2014, Editor: Routledge, Colección: Routledge Studies in the History of Economics.

Crespo, E. y Lazzarini, A.: "A 50 Años de "Producción de Mercancías por Medio de Mercancías" de Piero Sraffa", 2013, revista Circus, pags. 165-171, UBA, Buenos Aires.

Desai, M.: "Lecciones de teoría económica marxista", 1977, edit. Siglo XXI (*Marxian Economic Theory*, 1974).

Díaz, E.; Velasco, F.: "The Transformation of Values into Prices of Production in Marx's Scheme of Expanded Reproduction", 2015, Review of Radical Political Economics, 0486613415594146, first published on August 19, 2015.

Dobb, M.: "Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith", 1975, edit. Siglo XXI editores (primera edición en inglés, 1973, Cambridge U. Press). Internet: <https://fundamentosdepoliticaeconomica.files.wordpress.com/2014/09/dbbmauric.pdf>

Dowling, E.T.: "Matemática para economistas", 1982, McGraw-Hill.

Dumenil, y Levy: "El Problema de la Transformación Marxiana", 2009, revista Circus, , UBA, Buenos Aires.

Fiorito, A.: "La implosión de la economía neoclásica", 2007, Edition: Teoría Económica, Publisher: Ediciones Cooperativas, ISBN: 978-987-1246-49-6, internet: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

García, N.E.: "La crisis de la macroeconomía", edit. Marcial Pons, 2010.

Garegnani, P.: "Sraffa: Análisis Clásico versus Marginalista", 2014, Revista Circus, n. 6, UBA, Buenos Aires.

Gehrke, Ch. y Kurz, D.: "Sraffa on von Bortkiewicz: Reconstructing of Classical Theory of Value and Distribution" (*History of Political Economy*, 2006, Roeland antibodies and assays): https://www.researchgate.net/publication/31405061_Sraffa_on_von_Borkiewicz_Reconstructing_the_Classical_Theory_of_Value_and_Distribution

Gehrke, Ch., R. Ciccone y Mongiovi, G.: "Sraffa and Modern Economics, vol. I", 2013, edit. Routledge, New York.

Gehrke, Ch. y Salvador, N.: "Keynes, Sraffa an the Criticism of Neoclassical Theory", 2011, edit. Routlege, New York.

Gómez Villegas, J y Gómez-Antonio, M.: "Sobre los principios de economía. Microeconomía", 2011, edit. Fragua, Madrid.

Hahnel, R: "Radical Political Economy: Sraffa Versus Marx", 2017, New York, N.Y, Routleged, 2017

Harcourt, G.C.: "Teoría del Capital", apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau (Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975).

Harcourt, G.: "El Pensamiento Económico Heterodoxo del Siglo XX", 2008, revista Circus, UBA, Buenos Aires.

Hodson, G.M.: "After Marx and Sraffa", 1991, edit. Palgrave Macmillan, New York.

Kubin, I.: "Market prices and natural prices: a study in the Theory of the classical process of gravitation", 1991, Land, Peter and Gmbh Internationaler Verlag Der Wissenchaften, Frankfurt.

Kurz, D. Heinz; Salvadori, N.: "Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson" (*Piero Sraffa's Political Economy*, 2001, edit Routledge, London).

Kurz, D. Heinz; Salvadori, N.: "Piero Sraffa's contributions to economics: a brief survey" (*Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*", 2000, Cambridge University Press, pags. 3-24, Cambridge UK).

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri: "Theory of Production", 1997, Cambridge University Press, Melbourne, Australia.

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri: "Representing the Production and Circulation of Commodities in Material Terms: On Sraffa's Objetivism" (*Piero Sraffa: The Man and the Scholar*, 2008, Routledge, London and New York, pags. 249-278).

Kurz, D. Heinz: "Las contribuciones de Sraffa a la Economía: algunas notas sobre sus trabajos inéditos", 2007, U. N. Autónoma de México, México.

Kurz, H. D. y Salvatori, N.: "Sraffa y la Teoría del Valor del Trabajo", 2009, revista Circus, UBA, Buenos Aires.

Kurz, D. H: "The Hayek-Keynes-Sraffa controversy reconsidered" (*Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*, 2000, Cambridge University Press, pags. 257-304, Cambridge UK).

Lange, O.: "Political Economy, 1963, Ed. Pergamon Express, Oxford, UK (Economía Política, 1966, Ed. FCE.).

Levrero, S., Palumbo, A. y Stirati, A., Reseña: "Sraffa and the Reconstruction of Economic Theory", 2013, Palgrave MacMillan, Chennai, India.

Lieberman, E.: "Planification. Debats et problemes du Socialisme", 1965, Editions de la Nouvelle Critique, Paris ("Planificación del Socialismo", 1967, Ed. Oikos-Taus).

Lozano, E.: "Equilibrio económico general: Walras versus Sraffa", 1974, Anales de Economía, n. 21-22.

Mainwaring, L.: "Value and Distribution in Capitalist Economies: An Introduction to Sraffian Economics: An Introduction to Sraffian Economies", 1984, Editor: Cambridge University Press.

Menegatti, M.: "Piero Sraffa - An Italian Economist", 2008, Editor: VDM Verlag Dr. Mueller e.K.

Mora Plaza, A.: "Descifrando a Sraffa", 2011, Editorial Académica Española, Madrid.

Mora Plaza, A.: "La función de consumo de Keynes sobre fundamentos esraffianos", 2011, publicado en la pág. web de la U. de Málaga, (eumed.net/Contribuciones a la Economía, febrero 2011)
<http://www.eumed.net/ce/2011a/amp6.htm>

Mora Plaza, A.: "Modelo integrado Keynes-Sraffa", 2011, Publicado en la pág. web de la U. de Málaga, (eumed.net/Contribuciones a la Economía, marzo 2011)
<http://www.eumed.net/ce/2011a/amp7.htm>

Mora Plaza, A.: "Notas sobre fundamentos para una nueva teoría económica. Crítica de F. Azcurra y réplica del autor", 2012, revista "Nómadas" de la U. Complutense de Madrid, (primer trimestre de 2012)
<http://www.ucm.es/info/nomadas/>

Mora Plaza, A.: "Notas sobre fundamentos para una nueva teoría económica. Crítica de F. Azcurra y réplica del autor", 2012, revista "Nómadas", de la U. Complutense de Madrid, (primer trimestre de 2012)
http://webs.ucm.es/info/nomadas/33/antoniomora_2.pdf

http://www.theoria.eu/nomadas/33/antoniomora_2.pdf

Mora Plaza, A.: "El problema de la transformación de valores a precios de Marx a la luz del modelo de Sraffa", 2014, *International Multilingual Journal of Contemporary Research* June 2014, Vol. 2, No. 2, pp. 109-120 ISSN: 2372-4846 (Print) 2372-4854 (Online). 2014. Published by American Research Institute for Policy Development.

Mora Plaza, A.: "Líneas posible de avance del modelo de Sraffa", 2016, *Iberian Journal of the History of Economic Thought*, U. Complutense de Madrid, Vol. 3, n. 2016, pags. 42 a 67 -

<https://revistas.ucm.es/index.php/IJHE/article/view/53079/48729>

Mora Plaza, A.: "Introducción a Sraffa. Una teoría de la inflación no monetaria a partir de Sraffa", 2016, *Revista de Economía*, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Central de Ecuador, vol 68, n. 108.

Levrero, E.S.: "Some notes on wages and competition in the labour market" (*Sraffa and Modern Economics*, vol. I, 2011, pags. 361-384).

Nisticò S; Rodano G.: "Reflections on Sraffa's Legacy in Economics: A Review Essay" (*Piero Sraffa: The Man and the Scholar*, 2008, Routledge, London and New York, pags. 307-325).

Nisticò S.: "Sraffa 1926 and Sraffa 1960: an attempt to bridge the gap" (*Sraffa or An Alternative Economics*, 2008, pags. 114-126, Palgrave Macmillan, New York).

Pack, S.J.: "Reconstructing Marxian Economics: Marx Based Upon a Sraffian Commodity Theory of Value", 1985, Editor: Praeger Publishers Inc.

Pasinetti, L.: "Piero Sraffa and the future of economics", 2012, *Cambridge Journal of Economics*, 36, 1303-1314 doi: 10.1093/cje/bes036.

Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción", 1983, FCE (*Lezioni di teoria della produzioni*, 1975)

Potier, J.P.: "Piero Sraffa", 1994, ediciones Alfons Magnànim, Valencia (*Un économiste non conformiste. Piero Sraffa (1898-1883). Essay biographique*, 1987, Presse Universitaires de Lyon).

Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación", 1973, F.C.E (*On the Principles of Political Economy and Taxation*, Cambridge U. Press, 1950, Londres).

Ricardo, D.: el *Ensayo* de 1815.

Roncaglia, Alessandro: "Piero Sraffa", 2009, Edit. Palgrave MacMillan, New York.

Roncaglia, Alessandro: "La riqueza de las ideas", 2009, Prensas Universitarias de Zaragoza, (*The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought*", Cambridge University Press, 2005, UK).

Roncaglia, Alessandro: "Sraffa and the Theory of Prices", 1978, New York: Wiley (*Sraffa e la teoria dei prezzi*, 1975, Roma-Bari).

Salvadori, N.: "Sraffa on Demand: a textual analysis" (*Critical Essays on Piero Sraffa's Legacy in Economics*", 2000, Cambridge University Press, pags. 181-197, Cambridge UK).

Sánchez Choliz, Julio: "La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico", 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII, internet: <ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf>

Segura, J.: "Leon Walras (1834-1910: su vida y su obra", 1974, Anales de Economía, n. 21-22.

Schefold, Bertram: "Mr. Sraffa on Joint Production and other essays", 1989, edit. Routledge, New York.

Schefold, B., [Bharadwaj](#), K.: "Essays on Piero Sraffa: Critical Perspectives on the Revival of Classical Theory": Volume 6 (Routledge Library Editions: The History of Economic Thought), 2017, Editor Routledge, Colección: Routledge Library Editions: The History of Economic Thought.

Sheppard, E.: "The Capitalist Space Economy: Analysis After Ricardo, Marx and Sraffa", 1990, Editor: Routledge.

Sraffa, Piero: "Producción de mercancías por medio de mercancías", 1975, Oikos-Tau (*Production of commodities by means of commodities*, 1960, Cambridge U. Press).

Steedman, I.: "Marx, Sraffa y el problema de la transformación", 1985, FCE (*Marx after Sraffa*, 1977, London).

Spaventa, L.: "Apuntes de Economía Política", 1984, edit. Ariel.

Subiza Martínez, B.: "Juegos matriciales y su aplicación a la teoría Perron-Frobenius", U. de Alicante; http://www.ine.es/revistas/estaespa/112_3.pdf

Vegara, J. M.: "Economía política y modelos multisectoriales", 1979, edit. Tecnos.

Vianello, F.: "La Demanda Efectiva y la Tasa de Ganancia: algunas reflexiones sobre Marx, Kalecki y Sraffa", 2006, revista Circus, UBA, Buenos Aires.

Woods, J. E.: "The Production of Commodities. An Introduction to Sraffa", 1990, edit. MacMillan, London. Abraham-Frois, G y Berrebi, E.: *Theory of Value, Prices and Accumulation*, 1979, Cambridge U. Press (original en francés, 1976).

