VIAJE AL INTERIOR DE *PRODUCCIÓN DE MERCANCÍAS POR MEDIO DE MERCANCÍAS*

A travel into *Production commodities by means commodities*

Antonio Mora Plaza
Economista, Madrid
Coordinador del Monográfico

This paper is a travel into "Production commodities by means commodities". A travel trying to decode its logical structure by means a reading step by step of its chapters. Also it has the intention to development its possibilities in the future.

Vamos a intentar que lo sigue sea una guía para entender este enigmático e intrincado libro que fue publicado en inglés en 1960, pero que tuvo una larga gestación de casi 40 años. Sraffa lo concibe y lo resume desde el principio, desde el título y el subtítulo. Por el primero, viene a decir al lector curioso y a los economistas de la época que los medios de producción están en pie de igualdad que los bienes de consumo, que no hay unos bienes especiales ni privilegiados que merezcan un título distinto, criticando con ello –pero implícitamente- la concepción neoclásica-marginalista de ese medio de producción especial que llamaban y se siguen llamando *capital*. Por si hay duda, el subtítulo ya nos dice que el libro es una crítica -implícita- a tal concepción. Lo que ocurre es que es algo más. Bastante más. Lo iremos viendo. Conceptualmente el libro parece asequible y además Sraffa lo explica con una economía de recursos literarios pasmosa, pero tiene, quizá como contrapartida una dificultad: que no puede eludir un aparato matemático que puede parecer complejo. Comparado con Sraffa, las matemáticas de Ricardo o Marx son sencillas, aunque no lo sean necesariamente sus conceptos (sobre todo el caso de Marx[1]). El problema con Sraffa es que no se puede dar un paso conceptual, de desarrollo de su modelo, de verificación de sus deducciones, sin tener lápiz y papel en la mesa y pertrechados de los elementos mínimos del álgebra matricial. Para entender de verdad a Sraffa hay que caminar por dos carriles: por el de las ideas, conceptos e hipótesis económicas que, unas veces toma de los clásicos (muy principalmente Ricardo) y en otras crea o modula, y por el otro carril, por el de la lógica interna de su propio sistema. Lo cual es malo y bueno: malo porque puede ahuyentar al lector de lo que nos cuenta Sraffa de su sistema; bueno, porque nos permite utilizar el instrumental adecuado para seguir paso a paso su argumentación y sus conclusiones, pudiendo acotar sus hipótesis y asegurar el resultado lógico de sus conclusiones.

Comienza el libro con su punto de vista sobre si considera rendimientos constantes o no. Es una polémica para especialistas que de momento la saltamos, porque sin

[1] Como ejemplo, *el fetichismo* de la mercancía.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

conocer todo el libro sería gratuito tener un punto de vista *a priori*. A continuación justifica su visión y su modelo frente al imperante en la época diciendo que "*el enfoque marginalista exige que la atención se centre en la variación, porque sin variación, bien en la escala de la industria, bien las proporciones de los factores, no puede haber producto marginal ni coste marginal*"[2]. Y con el primero, los neoclásicos-marginalistas calculaban la retribución de los factores y, con el segundo, la cantidad que se debería producir.

El presente trabajo ha seguido secuencialmente el libro de Sraffa, aunque los epígrafes de ambos no coinciden. Al final se han añadido 5 apéndices que recogen extractos de artículos míos ya publicados o por publicar. Se ha hecho así para que el lector pueda comprobar la potencialidad del modelo de Sraffa cuando utiliza como basamento o luminaria de modelos ajenos no incompatibles. En efecto, tanto cuando se estudia la refutación del artículo de Samuelson de 1962 sobre la teoría del capital neoclásica (apéndice A), como cuando se procede a integrar aspectos –los más importantes- de la teoría keynesiana (apéndice B) o cuando se relacione aspectos de la teoría de Marx (apéndice C). Estos son sólo unos ejemplos. También parece casi evidente que no será nunca compatible con otros modelos como los que representan el marginalismo. Partir de Sraffa no es un capricho, sino que condiciona los desarrollos posteriores a pesar del nivel de abstracción y de los grados de libertad de que goza el universo creado por este genio de la economía, uno de los pocos con los que cuenta esta rama del conocimiento. En el apéndice D se expone un esbozo de lo que podría ser el desarrollo de una Macroeconomía puramente esrafiana, es decir, sin el recurso al multiplicador de Keynes surgido de la función de consumo de este. Sraffa tiene vida propia más allá de Keynes, Marx y el propio Sraffa. Y por último, en el apéndice F se discute –con una sorpresa– el teorema fundamental marxiano de Okishio-Morhisima.

A - Producción de subsistencia

El primer modelo de economía que propone Sraffa es el de subsistencia definiéndola como "*aquella que produce justo para mantenerse*"[3]. Dicho así parece ambiguo, pero lo que quiere decir es que cada sector produce lo que necesita otro sector como consumidor, de tal forma que se repite el ciclo sin variación ni en la cantidades producidas ni en las proporciones consumidas, como señala el mismo Sraffa en el prefacio. Divide a la economía en dos sectores, uno de los cuales produce trigo y el otro hierro, que además utilizan sólo trigo y hierro como medios de producción, y lo hacen de tal forma que el total de lo consumido por los dos sectores coincide con el total de lo producido por cada uno de ellos. Así, pone Sraffa como ejemplo un primer sector -que es el del de trigo- que produce 400 arrobas y utiliza para ello 12 toneladas de hierro y 280 arrobas del mismo producto que produce: trigo. El segundo sector, que es productor de hierro, lo hace por un total de 20 toneladas de hierro y utiliza como medio de producción para tal fin 120 toneladas de trigo del primer sector y 8 toneladas de hierro propios. Y aquí todo cuadra para que se repita el ciclo: el primer sector produce 400 toneladas de trigo que se consumen en su integridad (280 toneladas dentro del mismo sector y 120 que utiliza como medio el sector del hierro) y el segundo produce 20 toneladas de hierro que va a necesitar su propio sector (8 toneladas) y 12 que va a utilizar el otro. Y el ciclo puede repetirse indefinidamente.

[2] Pág. 12 de *PMPM.*
[3] Pág. 17 de *PMPM.*

Como se ve el modelo no puede ser más simple y, sin embargo, aúna dos cosas: lo que se produce y cómo se hace el reparto entre sectores para su repetición indefinida. Aparentemente no hay precios, pero estos pueden considerarse como la relación entre trigo y hierro para que para que las necesidades de consumo de cada sector sean pagados por la venta de su único producto. En concreto, para que el intercambio cumpla el requisito de equilibrio entre producción y consumo y pueda reproducirse el ciclo, el trigo y el hierro ha de cambiarse en la proporción de 120 tn. de trigo por 12 tn. de hierro, que son justamente lo que necesita cada sector del otro porque no lo producen ellos mismos (cada sector produce un único bien). O dicho de otra forma, la reproducción del sistema de tal manera que permanezca igual en sus pautas de producción, intercambio y consumo, exige que *el precio* de 10 toneladas de trigo sea de 1 tonelada de hierro. Con cualquier otra relación de cambio -de intercambio- no se repetiría el ciclo de la misma manera y la economía no sería viable porque uno de los dos sectores no tendría para pagar lo que compra al otro con el producto de su venta (también al otro).

El ejemplo anterior tomado de Sraffa es muy sencillo desde el punto de vista de la reproducción del sistema, porque tenemos sólo dos mercancías (hoy diríamos bienes y servicios) y dos sectores que intercambian entre sí. Si ahora aumentamos un sector más (Sraffa lo aumento con un sector de “cerdos”) y una mercancía más, la cosa se complica por las posibles combinaciones de intercambio entre sectores (empresas), pero las relaciones de intercambio de trigo, hiero y cerdos que permite su reproducción hasta dejarlo en las mismas condiciones es única. ¿Y eso por qué? Por dos cosas; 1) porque estamos en un sistema (modelo) en el que el número de mercancías y el de sectores (o empresas) es el mismo, 2) porque cada sector (empresa) produce un solo producto. Oigamos cómo cuenta Sraffa la situación anteriormente: “*Hay un único sistema de valores de cambio que, en caso de ser adoptado por el mercado, restablece la distribución original de los productos y hace posible que el proceso se repita*”[4]. Con la prevención que hace sobre si es *adoptado por el mercado*, Sraffa deja claro que una cosa son los precios que se derivan de su modelo y otro los precios reales al que se intercambian (compra-venta) los bienes y servicios.

B - Producción con excedente

Todo lo anterior lo llama Sraffa producción de subsistencia porque todo lo que se produce se consume en el mismo proceso o, como dice el propio Sraffa “*si la economía produce más del mínimo necesario para el reemplazamiento, se produce un excedente*”[5]. Es verdad que Sraffa acaba la frase anterior pasando a otro tema que de momento omitimos. Dicho más precisamente, una economía es de subsistencia según Sraffa si produce más de algún tipo de mercancía (bien o servicio) y no menos de ningún otro: lo primero por la propia idea de excedente y lo segundo por viabilidad. En efecto, si, por ejemplo, una economía necesitara 120 toneladas de acero para producir 100 toneladas, la economía sólo aguantaría un ciclo suponiendo que tuviera de inicio[6] esas 120 tn. y suponiendo que no pudiera reducir su escala de producción un 20%. Una economía con excedente se da, según Sraffa, cuando “*la*

[4] Pág. 18 de *PMPM.*
[5] Pág. 21 de *PMPM.*
[6] No se contempla el comercio exterior y la posibilidad de su importación.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

cantidad producida de cada mercancía es al menos igual que la utilizada por todas las ramas productivas en su conjunto"[7].

Llegado al punto anterior se hace cada vez más difícil eludir las matemáticas. Hasta el propio Sraffa, a pesar de su esfuerzo encomiable de que su obra no pareciera una mero modelo matemático, hizo explícito su modelo matemático que daba soporte a sus conceptos económicos, aunque utilizó una nomenclatura sui géneris, y ello a pesar de las recomendaciones de los matemáticos y amigos Besicovitch, Ramsey y Watson. En terminología moderna, el modelo de Sraffa de producción con excedente vendría definido por el siguiente sistema de ecuaciones (b1):

$$P_1Y_1 = (1+r)\left[P_1X_{11} + P_2X_{21} + \Lambda + P_nX_{n1}\right]$$
$$P_2Y_2 = (1+r)\left[P_1X_{12} + P_2X_{22} + \Lambda + P_nX_{n2}\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_iY_i = (1+r)\left[P_1X_{1i} + P_2X_{2i} + \Lambda + P_nX_{ni}\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_nY_n = (1+r)\left[P_1X_{1n} + P_2X_{2n} + \Lambda + P_nX_{nn}\right]$$

Una ecuación cualquiera del sistema anterior nos dice que el ingreso de una empresa (o sector) ***i*** cualquiera, que es el producto del precio $\boldsymbol{p}_i$ al que se ha vendido la mercancía ***i*** por la cantidad vendida $\boldsymbol{Y}_i$, es igual a la suma de los costes (lo que hay entre corchetes en el lado derecho de la ecuación ***i***) más un margen de ganancia ***r***, siendo $\boldsymbol{X}_{ij}$ el medio de producción ***i*** procedente del sector ***j***. El que se produzca excedente depende de que ***r*** sea mayor que cero, siendo el valor del <u>excedente</u> de un sector cualquiera ***i***:

(b2) $\quad$ *excedente de i* $= \boldsymbol{r}\ [\boldsymbol{p}_1X_{1j} + \boldsymbol{p}_2X_{2j} + \boldsymbol{p}_3X_{3j} + \ldots + \boldsymbol{p}_nX_{nj}]$

Es verdad que Sraffa emplea un mismo tipo de ganancia (beneficio) para todos los sectores que justificará más tarde, pero salvo esta concreción tan temprana de su modelo, lo que representa el juego de ecuaciones anteriores es lo que en el mundo real hacen gestores, empresarios y, en general, todo aquel que tiene un negocio, empresa o comercio: calcula los costes de los productos que compra y/o produce y pone un margen de ganancia para determinar los precios $\boldsymbol{p}_i$ a los que ha de vender lo que produce o con lo que comercia. Conceptualmente no puede ser más sencillo el modelo con que arranca Sraffa en su crítica a la teoría económica de la época y, en principio, no se ve cómo este modelo fuera a levantar tanta controversia en su momento para ser luego relegado por la ortodoxia. Sraffa, siguiendo con su ejemplo de la producción de subsistencia, pone como ejemplo también una economía de dos sectores en la que el primero produciría 575 arrobas de trigo utilizando 280 arrobas de este cereal más 12 toneladas de hierro, y un segundo sector con un producto final de de 20 tn. de hierro a partir de 120 arrobas de trigo y 8 tn. de hierro. Según lo anterior, esta economía produciría 175 arrobas de trigo más que lo que ha consumido [575-(280+120)]; no produciría, en cambio, excedente alguno de hierro porque habría consumido todo lo que ha producido (20 tn.) en el sector del trigo (12 tn.) y el resto (8tn.) en el propio sector del hierro. Es un ejemplo que se adecua a la producción con excedente: en el conjunto de la economía no se consume más de lo que se produce y en algún sector (o sectores) se produce más de su propio consumo. Otro problema es cómo se reparte ese excedente, porque ese reparto va a depender de las relaciones

[7] Pag. 22 de *PMPM*.

de intercambio entre las mercancías, es decir, de los precios medidos como las unidades de un bien que han de ser objeto de intercambio o compra-venta en relación con otro cualquier, o en relación a un mismo bien que se utiliza como medida de valor o *numerario*. Dicho de otra manera, debido a las relaciones de intercambio (precios), el reparto del excedente entre sectores o mercancías no tiene por qué coincidir con el sector o sectores que producen el excedente.

En este mismo capítulo del excedente avanza Sraffa un nuevo concepto que va a jugar un papel importante en su modelo: la diferenciación entre *bienes básicos* y *no básicos*. Considera Sraffa que bienes básicos son aquellos que "*entran directa o indirectamente en la producción de todas las mercancías*"[8]; los que no cumplen estos requisitos los llamará no básicos. Cuando llegue Sraffa al capítulo de la producción conjunta tendrá que matizar esta definición, pero la idea es que hay productos que influyen en la producción –y por tanto en los costes y precios- de otros bienes (básicos), mientras que otros no influyen porque *no* entran como medios de producción en ningún otro bien o servicio. Una de las consecuencias adicionales es la de que, sean cuales sean *los precios* de los bienes no básicos, estos no van a influir en los precios de los demás bienes, sean básicos o no básicos a su vez. Lo más parecido a este criterio diferenciador son los bienes de consumo y los de lujo de los clásicos en los que Sraffa se inspira; también la diferenciación entre bienes de consumo y de capital en el modelo neoclásico. El paso que da Sraffa respecto a los clásicos lo ve Pasinetti cuando dice que: "*Los economistas clásicos habían basado la distinción en el uso al que se destinaban las dos categorías de mercancías. La novedad del análisis de Sraffa es hacer descansar la distinción en las características técnicas de los procesos productivos*"[9].

Una discusión en la que entra Sraffa y que es tradicional en la historia del pensamiento es en el cómo se determinan los precios en este modelo. Aquí ya no sólo se trata de conceptos, sino de la lógica que subyace al modelo de producción con excedente que hemos visto. En el modelo de producción de subsistencia las relaciones de intercambio entre bienes servían para dos cosas: 1) para calcular como ha de ser aquel para que el sistema se reproduzca íntegramente así mismo bajo las mismas cantidades y proporciones; 2) para calcular los precios, porque estos eran los mismos que estas relaciones. En la producción con excedente en una economía de $\boldsymbol{n}$ bienes y servicios hay una variación: ahora tenemos una incógnita –si la tomamos como tal- además de $\boldsymbol{n}$-**1** precios relativos. Esa incógnita es la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$. Ahora el principio es solucionable porque tenemos $\boldsymbol{n}$ ecuaciones y $\boldsymbol{n}$-**1** precios relativos (o relaciones de intercambio) más la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$. Pero esta visión es meramente matemática. Lo que tenemos desde el punto de vista económico es que no podemos calcular primero los $\boldsymbol{n}$-**1** precios relativos para hallar después la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ o lo contrario: partir de una tasa de ganancia cualquier para hallar los $\boldsymbol{n}$-**1** precios relativos. La solución es que se ha de calcular *simultáneamente* los precios y la tasa de ganancia. Aquí ya se avizora el armamento intelectual que se deduce del modelo para abordar la teoría neoclásica de formación de los precios. La parte débil de este armamento teórico es que el modelo de Sraffa parte de un supuesto que puede ser objeto de crítica: que a pesar de la crítica a su vez al modelo marginalista de equilibrio general, el instrumental que Sraffa emplea es otro modelo de equilibrio general, sólo que más realista. Y es de equilibrio porque *los precios* que hemos visto en el sistema de ecuaciones (2) *no están fechados* y, en cambio, ha de suponerse un periodo de tiempo desde que compran o fabrican los medios de producción $\boldsymbol{X}$ y salen al mercado o se venden los productos finales $\boldsymbol{Y}$.

[8] Pág. 24 de *PMPM.*
[9] Pág. 39 de *Lecturas de la teoría de la producción*.

Pero sigamos, porque este capítulo de la producción con subsistencia es muy rico en ideas. Dice Srafa que "*hasta este momento hemos considerados los salarios como consistentes en los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores, de mismo modo que en que entraban en el sistema en pie de igualdad con el petróleo para las máquinas o los alimentos para el ganado*"[10]. En efecto, hasta ahora los trabajadores y sus salarios no ha salido a escena, pero están, porque no sería muy realista una teoría económica en el que los trabajadores (directos) y sus salarios no tuvieran su papel. Ocurre que esos salarios han servido para comprar bienes y servicios para el consumo de los trabajadores y sus familias y se han contado como medios de producción en pie de igualdad *al petróleo, las máquinas o los alimentos para el ganado*. Más allá de que este tratamiento pueda parecernos poco digno, Sraffa lo ve como una ventaja. Se ha visto anteriormente que Sraffa había introducido la diferenciación de lo que él llama bienes básicos y no básicos. Pues bien, con el tratamiento de los salarios como un bien básico más –porque entra en la producción de todos los bienes sin excepción- se conseguía que una variación de estos bienes que consumen trabajadores y familias pudieran influir en todos los demás bienes y, por lo tanto, en sus precios. Ocurre ahora que al hacer explícitos los salarios –que aún no se han hecho- ello va a suponer que los bienes destinados al consumo de trabajadores y familias no van a entrar como medio de producción en ningún sector, es decir, van a quedar "*relegados al limbo de los productos no básicos*"[11]. Y eso va a suponer que una posible variación de los salarios no debería suponer un movimiento de los precios. ¿Debemos aceptar este razonamiento de Sraffa como correcto? Pues para responder ahora no nos queda más remedio que volver a las matemáticas, porque ahora –al igual que pasaba antes- no estamos sólo ante un problema de conceptos y de terminología, sino de la lógica interna que subyace al modelo con la introducción de una nueva variable: los salarios. El sistema de ecuaciones que introduce Sraffa es como sigue[12] (b3):

$$
\begin{aligned}
P_1Y_1 &= wl_1 + (1+r)\left[P_1X_{11} + P_2X_{21} + \Lambda + P_nX_{n1}\right] \\
P_2Y_2 &= wl_2 + (1+r)\left[P_1X_{12} + P_2X_{22} + \Lambda + P_nX_{n2}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_iY_i &= wl_i + (1+r)\left[P_1X_{1i} + P_2X_{2i} + \Lambda + P_nX_{ni}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_nY_n &= wl_n + (1+r)\left[P_1X_{1n} + P_2X_{2n} + \Lambda + P_nX_{nn}\right]
\end{aligned}
$$

que en términos matriciales se puede resumir de la siguiente manera:

(b4) $$PY = wL + (1+r)PX$$

donde ***w*** es la tasa de salarios (única) para todos las mercancías (sectores), ***L*** es el vector horizontal de inputs de trabajo:

(b5) $$L = \left(l_1, l_2, \Lambda\ , l_n\right)$$

[10] Pág. 25 de *PMPM.*
[11] Pág. 26 de *PMPM.*
[12] Pág. 27 de *PMPM.*

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

Y es una matriz diagonal tal como:

(b6) $$Y = \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix}$$

donde cada $\boldsymbol{y}_{i=j}$ es la cantidad del bien ***i*** producida por el sector ***j***=***i***. Los precios son también el vector horizontal **1**x***n*** tal como:

(b7) $$P = \left(p_1, p_2, \ldots, p_n \right)$$

Y para terminar, la matriz de medios de producción ***X*** es:

(b8) $$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{21} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

en la que cada elemento $\boldsymbol{x}_{ij}$ es la cantidad del bien ***i*** aportada por el sector ***j*** (o por el proceso de producción ***j***). El que la matriz ***Y*** sea diagonal y la ***X*** sea cuadrada no diagonal responde al modelo con que a estas alturas trabaja Sraffa. De momento estamos en la producción simple, en la que cada empresa produce una sola mercancía de los ***n*** productos finales y donde se emplean ***n***x***n*** medios de producción.

Una vez pertrechados del instrumental adecuado volvemos a la cuestión planteada por Sraffa de si, como consecuencia de la introducción de los salarios, no vayan a verse afectados los precios por el relegamiento al limbo de los *no básicos* de los bienes que compran los trabajadores. Si se despeja el vector de precios, es decir, los precios, de la ecuación (4) que define al sistema de Sraffa sale lo siguiente:

(b9) $$P = wLY^{-1}\left[I - (1+r)A\right]^{-1}$$

siendo ***A*** una matriz llamada de *requerimientos* tal que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$. De (b9) podemos concluir que la tasa de salarios ***w*** sí influye en los precios, a igual que lo hace la tasa de ganancia ***r***, aunque de manera diferente: salarios lo hacen proporcionalmente y la tasa de ganancia de forma crecientemente creciente. De tener Sraffa la ecuación (b9) a la vista cuando reflexiona sobre la necesidad de dejar a los bienes salarios como no básicos a pesar de lo tan necesarios parecen –y que lo son porque es el alimento de los asalariados-, no hubiera debido tener duda. Es un ejemplo cómo para entender a Sraffa, desentrañarlo, valorar la certeza de sus afirmaciones cuando indaga en las consecuencias económicas derivadas de su sistema o modelo son imprescindibles el lápiz, el papel (hoja de cálculo) y el álgebra. Las hipótesis son libres, los conceptos libres y matizables, pero a medida que Sraffa va cerrando el sistema con nuevos conceptos y condiciones, será cada vez más necesario el instrumental lógico que evite errores e incoherencias. Mi hipótesis –sujeta a revisión en función de los documentos, cartas que vayan saliendo a la luz- es la de que Sraffa no quería convertir su libro bajo ningún concepto en un simple modelo matemático a lo Von Neumann o en unas simples tablas *Input-Output* a lo Leontief. Pero esta es sólo una hipótesis.

Queda ver la justificación de porqué Sraffa no incluye en (4) los costes salariales ***wL*** dentro de los costes para calcular los precios. Dice Sraffa que "*supondremos en lo sucesivo que el salario se paga post-factum, abandonándose así la idea de una salario avanzado desde el capital*"[13]. Independientemente de la interpretación de Sraffa, lo que se ha venido perpetuando es un error al llamar salarios *post-factum* a los salarios de (b4). Tal denominación parece indicar que las expresiones (b4) y (b9) -donde aparecen los salarios explícitamente- tienen que ver sobre *cuando* se pagan los salarios (avanzado), cuando *sólo* tiene que ver sobre el *cómo* –por cuanto- se calculan los salarios. Vamos a verlo. Si en lugar de que en (4), donde la tasa de ganancia ***r*** deja fuera a los gastos salariales, sí los tuviera en cuenta, la ecuación que definiría tal sistema sería:

(b10) $$PY = (1+r)\left[wL + PX\right]$$

Y si de aquí despejamos los precios queda:

(b11) $$P = w(1+r)LY^{-1}\left[I-(1+r)A\right]^{-1}$$

El factor (**1**+***r***) que diferencian (b9) y (11) nos dice que, dado un nivel de precios ***P***, los salarios van a ser diferentes en ambos modelos, es decir, con salarios *post-factum* (4) y con salarios *pre-factum* (9). Se trata sólo de despejar los salarios en (b4) y (b11), aunque para ello hay que post-multiplicar por ***Y*I** las ecuaciones (b9) y (11), y tomar como numerario el producto nacional ***PY*I**, es decir, hacer ***PY*I**=**1**, siendo **I** el vector vertical de unos. Obrando así obtendríamos:

(b12) $$w_{post} = \frac{1}{LY^{-1}\left[I-(1+r)A\right]^{-1}YI}$$

que nos da los salarios con el criterio *post-factum* esrafiano. Con los salarios que hemos llamado *pre-factum* saldría de (b13):

(b13) $$w_{pre} = \frac{1}{(1+r)LY^{-1}\left[I-(1+r)A\right]^{-1}YI}$$

Y como es natural, los salarios *pre* (13) serán más bajos que los *post* (12) porque los precios -llamémosle también *pre-factum*- se forman añadiendo el margen ***rwL*** al resto del margen de ganancia ***rPX***. Una vez más vemos que no podemos dejar el libro de Sraffa al mero razonamiento económico –con ser esto lo principal, puesto que se trata de un libro de economía- por el peligro que supone derivar conclusiones erróneas o ambiguas, como hemos visto que ha ocurrido con la distinción entre salarios *post* y *pre-factum.*

Vamos ahora a disfrutar con Sraffa de una victoria intelectual sobre el modelo neoclásico. Dice Sraffa que: "*En consecuencia, los movimientos de precios relativos de dos productos vienen a depender no sólo de las proporciones entre trabajo y medios de producción con los que se han obtenido, sino también mediante las*

[13] Pág. 26 de PMPM.

proporciones de las que estos medios han sido, a su vez, producidos, y también de las proporciones mediante las que estos medios de producción y aquellos medios de producción han sido obtenidos, y así sucesivamente"[14]. Nada de esto puede considerar el modelo neoclásico, donde se parte de una función de producción y donde las relaciones intersectoriales no existen o no son relevantes. Esto en el análisis parcial de origen *marshalliano*. En cuanto a la teoría del equilibrio general, esta está preocupada por los problemas de asignación de los recursos y en las soluciones de equilibrio, a ser posible único y estable. Vamos a traducir formalmente las afirmaciones de Sraffa. De (b11), que es la ecuación de definición del sistema en el modelo *esrafiano*, se obtiene:

(b14) $$P = w(1+r)LY^{-1}\left[I + (1+r)A + (1+r)^2 A^2 + \Lambda + (1+r)^{n-1} A^{n-1}\right]$$

Y que desarrollado para una mercancía determinada ***s*** sale (b15):

$$p_s = w(1+r) \times \frac{l_s}{y_s} \times \left[1 + (1+r)\sum_i^n a_{si} + (1+r)^2 + \sum_i^n \sum_j^n a_{si} a_{ij} + (1+r)^3 \sum_i^n \sum_j^n \sum_k^n a_{si} a_{ij} a_{jk} + \ldots + \right]$$

En lo anterior, los elementos obtenidos a partir de los sucesivos multiplicandos ***a***x...x***a*** son los medios de producción que se han obtenido (comprado) a otros sectores como productos finales, y así sucesivamente, en una cadena de traslación temporal y sectorial. Cada columna de la matriz resultante de los multiplicando representa todos los medios de producción directos e indirectos utilizados para producir una unidad de producto final actual. No obstante, en el modelo de Sraffa hay que matizar que medios de producción y productos finales no tienen una relación necesariamente de causa y efecto. Un ejemplo, para el modelo *esrafiano*, todo el acero utilizado es un medio de producción, así como todo el *stock* de acero en un momento determinado es el producto final, aunque no haya ninguna relación causa-efecto entre *esos* medios y *esos* productos. De ahí la fina y taimada ironía sobre los supuestos rendimientos constantes o no con que comienza su libro Sraffa. Si ahora queremos comparar los medios de producción empleados por dos productos finales en los que uno de ello actúa como numerario, sólo tenemos que tomar por cociente uno de estos productos y el supuesto numerario, que tendrá a su vez su propio proceso histórico de medios-productos antes comentado. La cosa quedaría formalmente como sigue (b16):

$$\frac{p_s}{p_z} = \frac{\dfrac{l_s}{y_s} \times \left[1 + (1+r) \times \sum_{i=1}^n a_{si} + (1+r)^2 \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{si} a_{ij} + (1+r)^3 \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{si} a_{ij} a_{jk} + \Lambda + \right]}{\dfrac{l_z}{y_z} \times \left[1 + (1+r) \times \sum_{i=1}^n a_{zi} + (1+r)^2 \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{zi} a_{ij} + (1+r)^3 \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{zi} a_{ij} a_{jk} + \Lambda + \right]}$$

En (b16) podemos ver lo que quiere decir Sraffa[15] con que los precios (relativos) dependen de la proporción entre los medios de producción hacia atrás en el tiempo del precio del producto que se intenta medir (expresión entre corchetes del numerador) y la proporción de estos medios de la mercancía que se utiliza como

[14] Pág. 33 de *PMPM.*
[15] Véase la disertación de Sraffa en la pág. 32 de *PMPM.*

numerario (entre corchetes en el denominador). No sabemos a priori cómo será la evolución por cociente de las dos expresiones entre corchetes, por lo que los *precios relativos* pueden seguir cualquier trayectoria, creciente, decreciente, cambiar de convexidad, etc., a medida que aumenta ***r***, porque eso va a depender de *las ponderaciones* de $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{i}$ que son *los sumatorios*. Y si la expresión entre corchetes fueran iguales, es decir, se produjeran ambos bienes ***s*** y ***z*** con la misma técnica, entonces, en este modelo al menos, los precios serían proporcionales a las horas de trabajo directa. Sería el caso de una sociedad primitiva que no tuvieran medios de producción o que estos fueran casi irrelevantes frente al trabajo directo. Es el caso también de Marx de igualdad de composiciones orgánicas de capital, supuesto este insostenible por falta de realismo, donde los precios son proporcionales a los valores bajo la concepción del valor como función proporcional de las horas de trabajo directas. Como se ve, apenas comenzada la andadura con Sraffa y la cosa ya da para discutir a y sobre A. Smith, D. Ricardo y C. Marx.

C - La mercancía-patrón y la razón-patrón

Se trata de uno de los fetiches de Sraffa junto con el de *la mercancía-patrón*. *La razón-patrón* es una característica que debería observar una cesta de mercancías (bienes y servicios) -que sería a su vez una economía que hoy llamaríamos virtual- que se caracterizaría en que *la proporción del excedente neto relativo de todas las mercancías de las que estuviera hecha sería igual para todos ellas*. El *excedente neto relativo* –no figura así con ese nombre en Sraffa- sería el cociente entre la diferencia entre el producto neto de cada mercancía menos la suma de todas mercancías del mismo tipo utilizadas como medios de producción dividido por estos medios. No hay que confundir con los medios utilizados por una empresa para producir esa mercancía, porque estos son heterogéneos. Imaginemos que viviéramos en una economía que para producir 120 tn. de acero se necesitaran 100 tn. de este mismo acero, independientemente de que se empleen otros medios; que para producir 10.000 tn. de aceite se necesitaran 8.333,33 tn. de aceite; que para ofrecer 150.000 kwh de energía fuera necesario gastar en su producción 125.000 kwh, etc. Puede comprobar el lector que todas estas relaciones entre producto *neto* final y medio empleado tienen algo en común: su relación es siempre el 20%. En *la mercancía-patrón* la empresa se diluye y cualquier relación causal entre medio y producto carece de sentido, porque aquí se establece una relación entre producto y medio mercancía a mercancía en el conjunto de un país. Se trata de una cesta virtual porque sería una casualidad inconcebible que alguna vez se diera en la realidad de una país la misma proporción entre productos finales y medios para todas las mercancías. El conjunto de estas mercancías hipotéticas, con esas proporciones entre productos y medios, sería la mercancía-patrón, y la relación entre aquellos sería la razón-patrón. Quizá la genialidad de Sraffa fuera ser capaz de construir esa cesta de mercancías *a partir de los datos de la realidad*. En términos matemáticos –no hay manera de eludirlas- esta mercancía-patrón o mercancía virtual vendría definida por (c1):

(c1)
$$R=\frac{\hat{y}_1-\sum_{j=1}^{j=n}\hat{x}_{1j}}{\sum_{j=1}^{j=n}\hat{x}_{1j}}=\frac{\hat{y}_2-\sum_{j=1}^{j=n}\hat{x}_{2j}}{\sum_{j=1}^{j=n}\hat{x}_{2j}}=\Lambda\ \Lambda=\frac{\hat{y}_n-\sum_{j=1}^{j=n}\hat{x}_{nj}}{\sum_{j=1}^{j=n}\hat{x}_{nj}}$$

siendo ***R*** la razón común a estas proporciones, es decir, la razón-patrón. El problema es ahora cómo calcular esta cesta de mercancías a partir de los datos de la realidad. También hemos dejado para lo último el porqué de esta construcción artificial de Sraffa y para qué sirve.

Ahora tenemos los datos de la realidad de productos finales $\boldsymbol{y}_i$ de cada mercancía que tenemos que relacionarlo con su equivalente producto final virtual $\hat{y}_i$, y lo mismo con $\boldsymbol{x}_{ij}$ real con su pareja en el espejo virtual $\hat{x}_{ij}$. Para estos cálculos creó Sraffa un sistema de ecuaciones que le permitían hallar ese conjunto de ***n*** valores virtuales de ***Y*** y de ***n****x****n*** de ***X*** a partir del siguiente sistema (c2):

(c2)
$$u\,y_1 q_1 = x_{11} q_1 + x_{12} q_2 + \Lambda\ + x_{1n} q_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$u\,y_n q_n = x_{n1} q_1 + x_{n2} q_2 + \Lambda\ + x_{nn} q_n$$

donde ***u*** es un coeficiente que va a estar relacionado con la razón-patrón ***R***; los $\boldsymbol{q}_j$ por su parte son *los multiplicadores* que van a permitir pasar del importe físico real del medio de producción a su imagen virtual en la cesta virtual o mercancía-patrón mediante (c3)

(c3)
$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} q_j$$

y de forma análoga para el producto neto real y el virtual de cada mercancía (c4):

(c4)
$$\hat{y}_i = y_{ij} q_j$$

Y para acabar por este paseo de definiciones formales, la relación entre ese enigmático coeficiente (reductor) ***u*** y la razón patrón sería (c5):

(c5)
$$u = \frac{1}{1+R}$$

Puede comprobarse que las ecuaciones (c2), (c3), (c4) y (c5) cumplen los requisitos de definición de la mercancía-patrón dada en (c1). El problema que surge ahora es el de calcular los multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ y el coeficiente ***u***, o dicho de otra manera, cómo resolver el conjunto de ecuaciones dado en (c2). La dificultad estriba en que si recontamos el número de ecuaciones, nos salen ***n***, es decir, tantas como mercancías (=sectores), pero tenemos ***n***+**1** incógnitas: ***n*** de $\boldsymbol{q}_j$ multiplicadores más una que es el propio coeficiente ***u***. Sraffa tenía que resolver el problema *lógico* -que se deriva de su modelo *económico*- de cómo añadir una ecuación más, pero sin añadir ninguna incógnita más. La solución la da con (c6):

(c6) $$\sum_{1}^{n} l_j q_j = 1$$

Es decir, convirtió en numerario la suma del producto de los inputs de trabajo (que en el modelo son datos) por los mismos multiplicadores (incógnitas). En realidad, convertir en numerario una expresión matemática en un sistema de ecuaciones es una manera de decir que todas las ecuaciones van a ser dividas por esa expresión. Y ahora ya tenemos entre (c2) y (c6) el mismo número de ecuaciones que de incógnitas ($\boldsymbol{n}$+**1**) y el sistema es soluble, obteniendo los multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ y el coeficiente $\boldsymbol{u}$ como solución del sistema. Y llegado a este punto alguien podría preguntarse que esto en realidad para qué sirve. Hay tres claves que debemos tener presente para lo que se avecina: el sistema de ecuaciones (c2), la relación entre el coeficiente reductor y la razón-patrón que está en (c5) y algo que no está presente en ambos: los precios. Y sin embargo, si no logramos conectar todo esto con el modelo de Sraffa que representa la realidad, es decir, (b10), nada de esto serviría para nada.

El problema a resolver lo plantea Sraffa en estos términos: "*La necesidad de tener que expresar el precio de una mercancía en términos de otra que es elegida arbitrariamente como patrón complica el movimiento el estudio de precios que acompañan a una variación de la distribución. Resulta imposible decir, ante cualquier variación particular de precios, si surge como consecuencia de las peculiaridades de la mercancía que está siendo medida, o si surge de las peculiaridades de la mercancía adaptada como patrón de medida*"[16]. Problema que lo retoma Sraffa de David Ricardo y, en general, de los clásicos: "*Cuando los bienes variasen en su valor relativo, sería deseable averiguar con certeza cuáles de ellos bajaron y cuáles aumentaron en su valor real, y ello sólo podría lograrse comparándolos sucesivamente con una medida estándar del valor, que no debe estar sujeta a ninguna de las fluctuaciones a las cuales están expuestas los demás bienes*"[17]. Pasinetti lo resume de esta manera: "*A un siglo y medio de distancia la de Sraffa –la mercancía-patrón- viene a realizar el sueño ricardiano de la medida invariable del valor*"[18]. Pero el autor añade cautamente, aunque a pie de página: "*Esto, al menos, por lo que se refiere a la característica de ser invariable al variar la distribución de la renta*"[19]. Pues bien, una economía que estuviera compuesta en sus proporciones de la misma manera que la mercancía-patrón no le afectaría los precios. La razón de ello –aunque no sea fácil de ver a simple vista- es la de que esta mercancía-patrón o virtual está hecha de tal manera que *los excedentes netos relativos* sean iguales para todas las mercancías. Además, en una economía que tuviera tal propiedad, saldría también que los medios de producción –que son a su vez productos finales de otros sectores- están construidos en la mismas proporciones de la mercancía-patrón, y así sucesivamente, si procediéramos a una cadena de sustituciones de los productos finales cuando se consideran a su vez medios de producción en períodos anteriores. Vamos a llegar ahora a una relación entre salarios $\boldsymbol{w}$, tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ y razón-patrón $\boldsymbol{R}$ a la que llega Sraffa aparentemente por puro razonamiento económico. La lectura de los capítulos III y IV son especialmente gratificantes al contemplar cómo razona un economista a partir de su propio modelo económico, pero en realidad no demuestra esa relación desde el punto de vista formal. Pero una vez que lleguemos a esa relación surge el problema capital que trata de responder a los deseos de Sraffa y

[16] Pág. 37 de *PMPM.*
[17] *Principios de Economía Política y Tributación*, D. Ricardo, pág. 33, edit. FCE, 1973.
[18] Pág. 152 de *Lecturas de teoría de la producción.*
[19] Pág. 152 de *Lecturas de teoría de la Producción.*

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

de Ricardo que hemos transcrito: ¿Y qué pasa si al final la razón-patrón depende de los precios? La respuesta es que nada de los desarrollos formales servirían para sustentar la aparente solución que dio Sraffa al problema que ellos mismos han descrito. Pero primero vayamos a la relación entre salarios ***w***, ganancias ***g*** y razón-patrón ***R***. Para ello tomamos la muleta de las matemáticas para así no caernos en medio de un razonamiento lógico-económico y planteamos el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

(c7) $$PY = wL + (1+g)\times PX$$

(c8) $$PY = (1+g_m)\times PX$$

(c9) $$LI = 1$$

(c10) $$PYI - PXI = 1$$

La ecuación (c7) ya la conocemos y es la que define (retrata) la realidad a los ojos de Sraffa. La (c8) surge de hacer cero la tasa de salarios, por lo que, de momento, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ es *sólo* la *tasa máxima de ganancia*, que es una denominación adecuada al hacer ***w***=**0** porque, en este caso particular, la tasa máxima acapara todo el excedente. La ecuación (c9) es la suma de los inputs de trabajo y que convertimos en uno de los numerarios. Por último, (c10) es el segundo numerario y representa el excedente en términos monetarios. Sraffa nunca llegó a presentar así y tan escuetamente este sistema de ecuaciones, pero sus hipótesis y razonamientos llevan inexorablemente a reducir su sistema –el que tiene en ese momento- a este conjunto de *relaciones lógicas*. De la resolución de este conjunto de ecuaciones matriciales sale:

(c11) $$\boxed{r = (1-w)g_m}$$

Y por fin llegamos a una relación entre ganancias y salarios que ¡no depende los precios!, puesto que no aparecen en la expresión (c11). ¿Seguro? Eso va a depender a su vez de dos cosas: que la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ dependa *sólo* de la razón-patrón ***R*** y que esta no dependa de los precios. Sraffa se salta esta parte del razonamiento precisamente porque no hace explícito en un solo bloque el sistema de ecuaciones de (c7) a (c10), pero sobre todo porque nunca llega a hacer explícita la ecuación (c8), la cual es imprescindible dado que no estamos autorizados por ella a llamar (igualar) la tasa máxima de ganancia con la razón-patrón por dos motivos: 1) porque (c8) surge *sólo* de hacer cero la tasa de salarios; 2) porque nada nos autoriza de momento a pensar que esta tasa de ganancia *no vaya* a depender de los precios. Resolvamos primero el problema de saber si $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ es igual a ***R***. El conjunto de sistemas de ecuaciones algebraicas antes mencionadas tienen su expresión matricial –que es una manera de representarlas sucintamente- mediante la ecuación matricial (c12):

(c12) $$uYQ = XQ$$

donde ***Q*** es el vector de multiplicadores ***n***x**1** y el resto de las expresiones de (c12) ya las conocemos. Si ahora pre-multiplicamos (c12) por los precios ***P*** y sustituimos ***u*** por su definición en (c5) queda:

(c13) $$P(YQ) = (1+R)P(XQ)$$

Po otro lado, si post-multiplicamos la ecuación (c8) por el vector de multiplicadores ***Q*** y la traemos aquí para poder contemplarla al lado de la anterior.

(c14) $$(PY)Q = \left[\left(1+g_m\right)PX\right]Q$$

¡Y resulta que $\boldsymbol{g}_{\text{m}}$ es igual que ***R***¡ Pero hay que advertir que lo es a partir de todas las consideraciones anteriores y, en especial, por la manera que se ha calculado la razón-patrón y la mercancía-patrón, y no de ninguna otra[20]. Sraffa omitió este paso intermedio y de ahí alguna de las dificultades de compresión de lo que es y de lo que no es la razón-patrón. Esta última caracteriza *el mundo virtual* de la mercancía-patrón; la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\text{m}}$ lo hace del *mundo real* dentro del modelo de Sraffa (la realidad como tal ya sabemos que es inabarcable). Resumiendo: la razón-patrón ***R*** es en este modelo de producción simple de Sraffa –y no necesariamente bajo otros supuestos- dos cosas absolutamente distintas: 1) la medida del *excedente neto relativo* de la mercancía-patrón; 2) la *máxima tasa de ganancia* que puede darse en el modelo *esrafiano* de producción simple definido por las ecuaciones (c7), (c8), (c9) y (c10).

Y aún queda un paso, porque no hemos demostrado que la razón-patrón ***R*** sea independiente de los precios, y si no lo hacemos, todo lo anterior sería un puro divertimento. De hacerlo, Sraffa habría resuelto uno de los problemas que se planteó D. Ricardo y es el de que se pueda hacer variar las ganancias a partir de la variación de los salarios o al revés –sólo hay que despejar ***w*** en (c11)- sin que influyan los precios, pero *no* hemos demostrado que tengamos un método de medición de precios, salarios y ganancias de tal manera que ante una variación de los precios relativos –que es lo que en realidad plantea el propio Sraffa- sepamos si ello *surge como consecuencia de las peculiaridades de la mercancía que está siendo medida, o si surge de las peculiaridades de la mercancía adaptada como patrón de medida.* Es decir, con todo lo anterior, sólo hemos visto la posibilidad de *cómo* medir la variación de la composición del excedente –entre salarios y ganancias-, *sean cuales sean los precios de las mercancías*, pero no al revés. Sigamos, porque aún falta la condición aludida: que la razón-patrón ***R*** sea independiente de los precios. Es verdad que Sraffa lo explica, lo razona económicamente, pero nunca lo demuestra. Y no lo hace porque sólo se puede estar seguro de ese hecho a partir del teorema de *Perron-Frobenius*. Parece ser que los amigos y colaboradores matemáticos de Sraffa –que ya hemos mencionado- le advirtieron sobre la necesidad de recurrir al teorema, pero Sraffa siempre se negó hacerlo explícito. El problema es que si no lo hacemos presente, nunca sabremos bajo qué condiciones la razón-patrón ***R*** es independiente de los precios y todo el esfuerzo de Sraffa para crear la razón-patrón y la mercancía-patrón no sirven para solucionar uno de los problemas que Ricardo y el propio Sraffa plantean. Al no hacer explícito el teorema -y por más que Sraffa se esfuerce- no puede demostrar lo anterior, es decir, que se pueda hacer variar una de las variables independientes del sistema –salario o ganancia- para comprobar cómo varía la otra –ganancia o salario- sin que estemos seguros de que los datos que reflejen el reparto no se deban a ninguna variación de los precios relativos. Vamos a ver cuándo se puede aplicar el teorema. Ahora que ya se ha demostrado que la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\text{m}}$ es igual que la razón-patrón ***R***, la ecuación (c14) se convierte en:

(c15) $$PY = \left(1+R\right)\times PX$$

[20] Sraffa lo razona en su capítulo **V,** aunque, en realidad, nunca llega a demostrar nada.

Y si ahora post-multiplicamos ambos lados de la ecuación por la inversa de ***Y*** y llamamos ***A*** a $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$, queda:

(c16) $$\frac{1}{1+R}P=PA$$

El teorema de *Perron-Frobenius*[21] (en su versión fuerte) dice que si ***A*** es una matriz cuadrada, no negativa e indescomponible, entonces el autovector de precios ***P*** es positivo y el autovalor ***u*** -que es la expresión ***u***=**1**/(**1**+**R**)- es *una función creciente* de los elementos de la matriz ***A***, que, evidentemente, no depende de los precios, sino sólo de ***Y*** y de ***X*** . ¡Y al fin se puede asegurar que ***R*** es independiente de los precios! y que la ecuación (c11) mide la variación *real* del reparto entre salarios y ganancias, sean cuales sean los precios relativos. El teorema dice más cosas que las exponemos más abajo, pero esto es lo relevante para abordar *parte* del problema planteado por Ricardo y el propio Sraffa. De nuevo la muleta de las matemáticas nos han ayudado a saber qué problema ha quedado resuelto, cuál no y bajo qué condiciones. Simplificando, el teorema de *Roche-Froebenius* (R-F) dice que (c17):

$$si\ \ A\ es\ \ R\text{–}F\ \ en\ \ uP=PA\ \Rightarrow P>0$$

$$si\ \ A\ es\ \ R\text{–}F\ \ en\ \ uP=PA\ \Rightarrow u=f(A_{RF})\ \ tal\ que\ \ \frac{dR}{dA}>0$$

$$si\ \ A\ es\ \ R\text{–}F\ \ en\ \ uP=PA\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\leq u\leq\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\ \ \forall j\ \ de\ \ j=1\ a\ n$$

Una economía se dice que es productiva cuando, en cada ciclo de la producción, es capaz de producir igual o mayor cantidad de cada uno de los bienes que los producidos en el ciclo anterior. En términos matemáticos se traduce con $\boldsymbol{A}_t=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}_t^{-1}>\boldsymbol{A}_{t-1}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{-1}$. Para establecer la igualdad en un sistema de reproducción simple se ha de multiplicar la matriz $\boldsymbol{A}_t$ (que ya es $\boldsymbol{A}_t=\boldsymbol{A}_{t-1}=\boldsymbol{A}$ por estar en la reproducción simple) por un número ***u*** menor que uno. De lo anterior se deduce que para que se cumpla que ***uP***=***PA*** ha de ocurrir que ***u***<**1**. Y si se cumple lo anterior obtenemos que ***R***>**0**, dado que ***R***=(**1**-***u***)/***u***.

Pertrechados del aparato formal que se deduce de las hipótesis del modelo, podemos ahora corroborar o no las afirmaciones de Sraffa. Un ejemplo es el de la pág. 42 de *PMPM* cuando dice que: "*Tal relación –entre salarios y ganancias- es de interés solamente si se puede demostrar si su aplicación no está limitada al sistema patrón imaginario, sino que es capaz de ser extendido al sistema económico efectivo de observación*"[22]. Sea la relación encontrada para la razón-patrón y las tasas de salario y ganancia (c18) que sale de despejar los salarios (c11):

---

[21] *Lecturas de la economía de producción*, Pasinetti, apéndice, pág. 285 y siguientes.
También, *Besicovitch,Sraffa and the existence of Standard Commodity*, 2010, N. Salvadori.
http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf

[22] Con estas palabras queda claro los 3 mundos en los que se mueve Sraffa en "*Producción de …*": el mundo real del que toma los datos, el mundo real constreñido y definido por su modelo económico y el mundo virtual de la razón-patrón y de la mercancía-patrón.

(c18) $$w = \frac{R - r}{R}$$

La (c18) indica la relación entre salarios y ganancias en el mundo de la mercancía-patrón o cesta virtual. Ahora bien, el mundo real viene definido en Sraffa en este modelo de producción simple por (c19):

(c19) $$PY = (1 + r) \times PX + w_m L$$

donde hemos dado otro nombre a la tasa de salario $\boldsymbol{w}_m$ porque, precisamente, se trata de demostrar de si los salarios de (c19) pueden ser los mismos que los de la mercancía-patrón $\boldsymbol{w}$ en (c18). Del sistema de ecuaciones (c7), (c8) y (c9) sale:

(c20) $$w_m = 1 - rPXI$$

Según esto, para poder comparar el mundo de la razón-patrón de (c18) y el mundo real de (c20) ha de ocurrir que ambas tasas de salario sean iguales, es decir:

(c21) $$\frac{R - r}{R} = w = w_m = 1 - rPXI$$

Y de (c21) se obtiene que:

(c22) $$PXI = \frac{1}{R}$$

Aparentemente -viendo (c22)- parecería que la afirmación de Sraffa sobre la correspondencia entre el mundo *virtual* del sistema-patrón y el mundo real definido por su sistema (c7) no pudiera ser mantenida. La razón es que la igualdad (c22) tiene toda la apariencia de que *sólo* por casualidad pudiera existir un vector de precios satisfacerla. Pues sí existe, porque (c22) se obtiene a su vez de resolver el par de ecuaciones matriciales (c8) y (c10), que son dos de la cuatro de definición del *sistema real* de Sraffa:

(c8) $$PY = (1 + R) \times PX$$

(c10) $$PYI - PXI = 1$$

por lo que (c22) se cumple, ¡sea cual sea el vector de precios $\boldsymbol{P}$! Este ejemplo, así como decenas de ellos, en los que aparecen deducciones y afirmaciones de Sraffa que a veces van contra la intuición, sólo pueden ser mantenidas si se tiene el sistema formal a la vista y de sus consecuencias. Por ello, por más esfuerzo que haga Sraffa por parecer que sus afirmaciones son producto de la mera lógica económica, hay que decir que lo son con seguridad en la medida que se han formalizado las deducciones y sus conclusiones, y se tienen a la vista. A lo largo de la obra de Sraffa intuimos ese andar en paralelo de las explicaciones económicas y las deducciones lógicas de su propio sistema, pero con la dificultad de que las posibles demostraciones formales de

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

sus aserciones nunca las hace explícitas. El resultado es engañoso para el lector. Parecería que es más fácil su comprensión, pero ocurre y ha ocurrido que hasta grandes economistas han desistido de su lectura ante el torrente de afirmaciones y conclusiones que aparentemente surgen del mero razonamiento económico. Esta es, en definitiva, la intención de este modesto trabajo: la de ser una guía en la compresión del libro de Sraffa, pero yendo, en lo posible, un poco más lejos en las conclusiones que se deducen del sistema del economista italiano.

Resulta curioso hasta cierto punto que Sraffa dedicara todo un capítulo[23] –el V- de su obra para demostrar que la razón-patrón y que el sistema patrón es único, cuando esto es un problema meramente matemático que se deriva de su sistema. Acabamos de ver que la razón-patrón ***R***, en la producción simple de Sraffa, surge de aplicar *Perron-Frobenius* a la matriz ***A***, que es a su vez función de los medios de producción ***X*** y de los productos finales ***Y***. El teorema nos dice que sólo existe una autovalor máximo que da un vector de precios positivos, siempre que la matriz ***A*** cumpla las condiciones de aplicación del teorema. También nos da el autovector por la derecha de multiplicadores, que son los que van a generar la mercancía-patrón a partir de los datos de la realidad ***X*** e ***Y***. No vale ningún otro autovalor, porque, en este caso, lo que el teorema garantiza es que cualquier otro que no sea el máximo nos dará que al menos uno de los autovectores de ***A*** (los tomemos por la izquierda, es decir, los precios, los tomemos por la derecha, es decir, los multiplicadores) es negativo. Con estas consideraciones, podemos estar seguros de que *sólo existe una razón-patrón y una cesta de mercancías*, dados un vector ***L*** de inputs de trabajo[24], una matriz ***X*** de medios de producción y una matriz diagonal de productos finales ***Y***. Para ello ha sido imprescindible el teorema de *Perron-Frobenius*. Y ya está demostrado todo el capítulo V. Y sin embargo, nada de lo anterior puede sustituir las palabras de Sraffa, su explicación económica de este hecho, cosa que puede extenderse a todo los aspectos de su modelo económico. Su lectura resulta insustituible y gratificante.

Y ya que tenemos lo anterior, podemos adelantarnos –para luego retroceder- al capítulo VIII titulado "El sistema patrón con productos conjuntos". Dice Sraffa al comienzo del capítulo que "*tan pronto como consideremos en detalle la construcción de un sistema patrón con productos conjuntos, resulta obvio que puede que algunos de los multiplicadores tengan que ser negativos*"[25]. Sraffa tiene varios criterios de lo que entiende por producción conjunta, pero aquí la especifica para el caso de "*dos productos producidos conjuntamente por cada uno con dos métodos diferentes*"[26]. Si eso es así, ha de entenderse formalmente que en este caso la matriz de productos finales ***Y*** no es simplemente una matriz diagonal, tal y como ocurre en la producción simple, sino que es una matriz cuadrada de orden ***n***, tal que todos sus elementos son o pueden ser mayores que cero. Pues bien, vimos que los multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ salían de la resolución del conjunto de ecuaciones:

(c12) $$uYQ = XQ$$

(c13) $$LQI = 1$$

[23] Págs. 47 y siguientes.
[24] Estos influyen en la medida que su suma **LI** ha de utilizarse como numerario para configurar la mercancía-patrón.
[25] Pág. 71 de *PMPM.*
[26] Pág. 71 de *PMPM.*

Ahora, si en (c12) sustituimos ***X*** por su valor definido en ***X***=***AY*** tal que ***A***=***XY***$^{-1}$ y trasponiendo términos, queda:

$$[uI - A]YQ = 0 \qquad \text{(c14)}$$

El sistema de ecuaciones anterior admite la solución trivial de ***Q***=**0**, es decir, que todos los multiplicadores valgan cero. Esa solución no nos interesa. Si además suponemos que todos los productos finales son mayores o iguales a cero, es decir, que ***Y***>=**0**, sólo nos queda que para que se pueda cumplir (c14) ha de cumplirse ***uYQ***=***AYQ***. Pero si los elementos de la diagonal de ***Y*** son mayores que cero y ***u*** es un coeficiente que, por hipótesis, lo establecemos mayor que cero, todos los elementos del vector vertical ***uYQ*** son mayores que cero. Ello hace que ***AYQ*** sea también un vector de ***n*** elementos mayores que cero. En la producción simple lo podíamos asegurar porque la matriz ***A*** de requerimientos era el producto de la matriz de medios ***X*** por la inversa de la matriz diagonal de productos finales ***Y***, que es otra matriz formada por los inversos de los elementos de la matriz original. Es decir, en la producción simple todos los elementos de la matriz ***A*** son positivos. Ahora, en la producción conjunta, no podemos decir lo mismo, porque la inversa de ***Y*** ya no es una matriz diagonal, por lo que no podemos asegurar que su inversa, es decir ***Y***$^{-1}$, tenga todos sus elementos positivos. Y con ello tampoco podemos asegurarlo de los elementos de ***AYQ***, con lo que la igualdad (c14) *no* tiene porqué cumplirse con multiplicadores positivos, sino que puede hacerlo con uno o varios multiplicadores negativos con tal de que se cumpla:

$$\boxed{u\Big[\sum_{j=1}^{n} y_{ij}q_j + y_{ik}(-q_k)\Big] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j + (-a_{ik})\times(-q_k) > 0 \quad \forall i = 1 \ a \ n} \qquad \text{(c15)}$$

Resumiendo, en la producción conjunta, dado que los elementos de ***A*** pueden ser negativos, es posible que se den multiplicadores negativos y, a pesar de todo, se cumpla (c12). Todo va a depender del peso de los elementos de la matriz ***A***, es decir de los $\boldsymbol{a}_{ij}$, para que su valor negativo pueda ser compensando mediante los otros sumandos en la ecuación (c15) y cumplirse esta con valor positivo. En la (c15) sólo hemos puesto un caso de elemento negativo de $\boldsymbol{a}_{ij}$, el $\boldsymbol{a}_{ik}$, pero pudieran ser tantos como se quiera, con tal de que sean compensados por otros positivos y el resultado final de (c15) sea positivo. Al final todo depende la inversa de los productos finales ***Y***. Y con esta discusión de sobre los aspectos formales del tema de los multiplicadores para la producción conjunta podemos disfrutar de la lectura de todo el capítulo VIII –insustituible por otra parte- con la seguridad de que no hay ningún error en el razonamiento de Sraffa y nos podemos centrar en los aspectos económicos de su disertación.

Cualquiera que llegue a este punto del libro de Sraffa puede preguntarse con justeza: ¿podría tener la razón-patrón de Sraffa ***R*** obtenida por el método de los multiplicadores el mismo valor que *el menor* valor de *los excedentes netos relativos*? Este concepto no está así en Sraffa, pero es la misma idea que la razón-patrón: se deriva del cociente entre la diferencia de los productos finales y medios de producción y estos últimos. Llamemos $\boldsymbol{R}_m$ al *mínimo* valor de todos los excedentes netos relativos, es decir:

(c16) $$R_m = mínimo \;\; de \;\; \frac{y_i - \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij}}{\sum_{j=1}^{j=n} x_{ij}} \quad \forall i = 1 \;\; a \;\; n$$

La pregunta es si ***R*** es ***R***m. De (c16) se deduce que:

(c17) $$y_i >= (1 + R_m) \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad \forall i = 1 \;\; a \;\; n$$

O en términos matriciales:

(c18) $$Y >= (1 + R_m) X$$

Y que pre-multiplicada por el vector de precios ***P*** queda:

(c19) $$PY >= (1 + R_m) PX$$

Por otro lado, el teorema de *Perron-Frobenius* nos asegura que si se cumple los requisitos sobre la matriz ***A***=***XY***$^{-1}$ que ya hemos visto, obtenemos una ecuación como:

(c20) $$PY = (1 + R) PX$$

tal que los precios son positivos. Si además la matriz ***A***=***XY***$^{-1}$ es productiva, entonces ***R*** es mayor que cero. De la fusión de las ecuaciones (c19) y (c20) sale:

(c21) $$PY = (1 + R) PX >= (1 + R_m) PX$$

Y que puesto de otra forma queda:

(c22) $$(R - R_m) PX >= 0$$

Pero el propio teorema mencionado –y esto es importante- nos dice que el vector de precios ***P*** es estrictamente positivo. Además, la matriz ***X*** de medios de producción está constituida por ***n***x***n*** elementos no negativos. De ambas cosas se deduce que:

(c23) $$\boxed{R >= R_m}$$

Es decir, la razón-patrón ***R*** de Sraffa puede ser o no igual al menor de los excedentes netos relativos, aunque lo normal es que sea mayor. La ventaja de utilizar la razón-patrón de Sraffa ***R***, es decir, *Perron-Frobenius*, es que nos asegura un vector de precios positivos, ¡incluso en el caso de que la matriz ***A*** *no* fuera productiva en alguna de las mercancías! Dicho de otra forma, incluso en el caso de que algún excedente neto relativo fuera negativo.

D - La reducción del "capital" (medios) a trabajo fechado

Para Sraffa la reducción de los medios de producción a trabajo fechado es "*una operación mediante la cual, en la ecuación de la mercancía, los diferentes medios de producción utilizados son reemplazados por una serie de cantidades de trabajo, cada una de las cuales lleva su fecha cruzada*"[27]. Lo que quiere decir Sraffa es que en su modelo –de momento sólo de producción simple- las cantidades del lado derecho de la ecuación pueden ser reemplazadas por las mismas cantidades que figuran en el lado izquierdo. Para ver cómo se produce esta cadena de re-emplazamientos, traemos aquí la ecuación (d1) que es la definición del modelo de producción simple *post-factum*:

(d1) $$PY = (1+r)\times PX + wL$$

Sraffa habla de "*reemplazar los medios de producción por sus propios medios de producción*", lo que nos da con una ecuación del tipo (d2):

(d2) $$PX_t = (1+r)\times PX_{t-1} + wL_{t-1}$$

donde los medios de producción $\boldsymbol{X}_{t-1}$ son productos finales del período siguiente. Eso nos deja que los medios de producción del período ***t*-1** han sido producidos de la misma manera que en (d2), pero con un ciclo (año o cualquier período que se considere de reproducción simple) tal como (d3):

(d3) $$PX_{t-1} = (1+r)\times PX_{t-2} + wL_{t-2}$$

Si ahora sustituimos $\boldsymbol{PX}_{t-1}$ de (d3) en (d2) queda:

(d4) $$PX_t = (1+r)^2 PX_{t-2} + w(1+r)L_{t-2} + wL_{t-1}$$

En el período ***t*-2**, la ecuación que define el sistema sería:

(d5) $$PX_{t-2} = (1+r)\times PX_{t-3} + wL_{t-3}$$

Y sustituyendo análogamente $\boldsymbol{PX}_{t-2}$ de (d5) en (d4) queda:

(d6) $$PX_t = (1+r)^3 PX_{t-3} + w(1+r)^2 L_{t-3} + w(1+r)L_{t-2} + wL_{t-1}$$

[27] Pág. 57 de *PMPM.*

Y si se sigue el proceso hacia atrás en el tiempo de esta cadena de re-emplazamientos, obtendríamos la ecuación de reducción de (medios de producción) a trabajo fechado:

(d7) $$\boxed{PX_t = wL_{t-1} + w(1+r)L_{t-2} + \Lambda + w(1+r)^{t-i-1}L_{t-i} + (1+r)^{t-i}PX_{t-i}}$$

La expresión $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{t-i}\boldsymbol{PX}_{t-i}$ es un resto –Sraffa lo llama "*residuo de mercancías*"[28]- que debería disminuir a medida que el retroceso en el tiempo fuera mayor hasta su desaparición, aunque viendo su expresión no lo podemos asegurar porque va a depender de la cercanía que esté ***i*** de ***t*** (es decir, de la intensidad del retroceso en el tiempo) y de los medios de producción $\boldsymbol{X}_{t-i}$ del período ***t-i***. Llegado a (d7) hay que reconocer la habilidad de Sraffa para no entrar en el tema de los rendimientos. En efecto, en (d7) han desaparecido los medios de producción en la expresión entre corchetes, no así en la del resto. Pero en esta disminución del peso del pasado de esta reducción tiene una excepción: cuando la tasa de salarios ***w*** sea **0**. Dice entonces Sraffa que "*solamente cuando **r=R** el residuo se hace importante como determinante único del precio del producto*"[29]. En efecto, entonces la expresión (d7) se convierte en:

(d8) $$PX_t = (1+r)^{t-i}PX_{t-i}$$

Despejar los precios en (d8) exige algo más de preparación. Si post-multiplicamos la expresión por la inversa de $\boldsymbol{X}_t$ y tras un cambio algebraico más queda:

(d9) $$\frac{1}{(1+r)^{t-i}}P = PX_{t-i}X_t^{-1}$$

y los precios serán no negativos si el producto $\boldsymbol{X}_{t-i}\boldsymbol{X}_t^{-1}$ cumple los requisitos del teorema de *Perron-Frobenius*: que sea cuadrado, no negativa e indescomponible (irreductible). Lo va a ser por una cuestión que no se ha planteado hasta ahora. Cuando estábamos en la producción simple definida por la ecuación

(d10) $$PY = wL + (1+r)PX$$

la matriz ***X*** de medios en (d10) era cuadrada mientras que la ***Y*** de productos finales era diagonal. Ahora que los productos finales son medios de producción del siguiente, todas las matrices han de ser diagonales, y dado que los elementos de una matriz inversa son los inversos de la diagonal de la matriz original, entonces todos los productos $\boldsymbol{X}_{t-i}\boldsymbol{X}_t^{-1}$ va a ser positivos. Sraffa no pudo o no quiso entrar en estos detalles porque al parecer huía de hacer explícito el teorema de *Perron-Frobenius* como de la peste. Si en (d7) despejamos los precios queda (d11):

$$\boxed{P = w\left[L_{t-1} + (1+r)L_{t-2} + \Lambda + (1+r)^{t-i-1}L_{t-i-2}\right] \times \left[X_t - (1+r)^{t-i}X_{t-i}\right]^{-1}}$$

[28] Pág. 58 de *PMPM.*
[29] Pág. 58 de *PMPM.*

donde sólo se podrá asegurar que los precios sean positivos si lo es la expresión última entre corchetes de (d11), lo cual exige que se cumpla (dado que los medios de producción son matrices diagonales) que:

(d12) $$X_t > (1+r)^{t-i} X_{t-i}$$

cosa que no se puede asegurar, por lo que tampoco se puede asegurar los precios positivos en (d11). En definitiva, el *residuo de mercancías* de Sraffa tenía más problemas de lo que parecía.

La reducción de trabajo fechado plantea dos cuestiones más: ¿Es aceptable un modelo de reducción de trabajado fechado manteniendo los mismos precios a lo largo del proceso? ¿El que no aparezcan explícitamente los medios de producción –con la excepción del residuo- y los productos finales asegura que el modelo no guarde ningún tipo relación entre productos y medios (rendimientos constantes como comentaba Keynes o que no guarde ninguno, como supone el propio Sraffa)? Con el desarrollo anterior, que es el de Sraffa pero haciendo explícito "el residuo", no se puede asegurar nada.

A continuación de lo anterior, aborda Sraffa el problema del capital y su distribución señalando "*los intentos que se han hecho de encontrar en el período de producción una medida independiente de la cantidad de capital que pudiera ser utilizada sin recurrir en un argumento circular para determinar los precios y las participaciones en la distribución*"[30]. Es la polémica sobre la teoría del capital de la que hay mucha literatura a partir precisamente del libro de Sraffa: Harcourt[31], Pasinetti[32], Garegnani[33], Dobb[34], Nuti, etc. Abrió la polémica Joan Robinson[35] en los años 30 del siglo pasado preguntándose aquello de qué es el capital, como se mide, como se agrega y acabó más o menos oficialmente con el reconocimiento de Samuelson de la imposibilidad de construir una función de producción, aunque sea en forma de "parábola"[36], con las propiedades adecuadas para la teoría neoclásica de la distribución de los recursos y del pago de los factores según sus productividades marginales. Sin embargo, Sraffa, en lugar de buscar las relaciones equivalentes en su sistema a las relaciones capital/trabajo, capital/producto y trabajo/producto neoclásicas, busca refutar la teoría neoclásica del capital por diferencias de precios de dos mercancías reducidos sus medios de producción a capital fechado. El resultado en mi opinión es insatisfactorio aunque no pierda el hilo. Así, trae un término (***t***-***k***)-*ésimo* de (d11) para hacer presente el valor del capital en ese lugar temporal $\boldsymbol{wL}_{t\text{-}k}(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^k$ y, dada la relación creada -¿descubierta?- por Sraffa entre salarios y ganancias para la producción simple $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{R}/(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})$, obtiene Sraffa el término (***t***-***k***)-*ésimo* del desarrollo de la reducción a trabajo fechado de (d11) tal como:

(d13) $$\frac{R-r}{R} \times L_{t-k}(1+r)^k$$

[30] Pág. 62 de *PMPM.*
[31] *Some Cambridge controversies in The Theory o Capital,* 1969.
[32] *Switches of Tecnihque and the Rate of Return in Capital Theory*, 1969.
[33] *Heterogenuos Capital*, *The Production Function and The Theory of Distribution*, 1970.
[34] *The Sraffa System and Critique of the Neo Classical Theory of Distribution*, 1970.
[35] "¿Existe una unidad en la que pueda medirse el capital agregado o social y que sea independiente de la distribución y de los precios?", Harcourt, artículo citado.
[36] *Parable and Realism in Capital Theory: The surrogate Production Function*, 1961.

Sraffa argumenta en (d13) que este componente (***t***-***k***)-*ésimo* de la formación de los precios con reducción a trabajo fechado es ambiguo en cuanto al tipo de ganancia (interés), porque si bien es creciente respecto al factor $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^k$, es en cambio decreciente con respecto a ***R***/(***R***-***r***). Sraffa se da por satisfecho con este instrumental para refutar la teoría de la productividad marginal derivada del modelo neoclásico que dice que *las rentas de los factores son directamente proporcionales a los precios de los productos e inversamente proporcionales a su participación en la producción dado que su productividad marginal es siempre decreciente (sin excepción)*. Sin embargo, yo no entiendo que Sraffa elija precisamente la eliminación de los medios de producción (el capital neoclásico) mediante su reducción a trabajo fechado precisamente cuando quiere demostrar que la relación, por ejemplo, entre estos medios y su retribución (la tasa de ganancia o de interés) no es acorde con el modelo neoclásico. Dicho de otra manera, si el actor (los medios) desaparece en escena, no se pude demostrar la bondad de su papel. Y todo ello –y algo que no se ha comentado- le sirve a Sraffa para concluir –y finalizar literalmente- este capítulo que: "*De aquí se deduce que si el salario se reduce en términos de cualquier mercancía, el tipo de beneficio aumentará, y para un aumento de salario sucederá lo contrario*"[37]. Pero para este camino no se necesitan las alforjas del capital (medios de producción) a trabajo fechado, a pesar de que ello constituye un aspecto esencial de su modelo. Lo que es inadecuado es el momento. Todo parece indicar que este capítulo es un pastiche de varias cosas que Sraffa embutió ahí como pudo. Para la proposición sobre los movimientos de salarios y de ganancias sólo hay que ir a la relación entre tasa de salario, tasa de ganancia y razón-patrón que el propio Sraffa descubrió genialmente. En esta función, la razón-patrón ***R***, depende los valores físicos del modelo como consecuencia de la posibilidad de aplicar *Roche-Frobenius*. Explicamos esta relación. Esta razón-patrón surge de hacer que ***u*** sea ***u***=**1**/(**1**+**R**), siendo ***u*** el autovalor *de más alto valor* de la matriz de requerimientos ***A*** de acuerdo con [**1**/(**1**+***R***)]***P***=***PA***. Pero además, ya hemos visto que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ surge de la ecuación ***PY***=(**1**+***R***)***PX*** al pos-mutiplicarla por $\boldsymbol{Y}^{-1}$. Uno de los lemas del teorema de *Rouche-Frobenius* dice que el autovalor –en este caso ***u***- es *una función creciente*[38] de los elementos de la matriz ***A*** procedente de ***uP***=***PA***. Esta propiedad ha resultado extraordinariamente importante para evaluar la aportación del modelo de Sraffa a la crítica de la teoría del capital, aunque Sraffa –desgraciadamente- no la utilice. Es decir, que según esta propiedad podemos escribir que:

(d14) $$u=f(A) \quad con \quad \frac{du}{dA}>0 \quad siendo \quad A=XY^{-1}$$

De lo anterior se desprende que:

(d15) $$\frac{du}{dY}>0 \quad y \quad \frac{du}{dX}<0$$

Pero además. tenemos la relación entre el autovalor máximo ***u*** y la razón-patrón ***R***:

[37] Pág. 64 de *PMPM.*
[38] En la versión débil del teorema, es decir, cuando sólo se exige que sea reducible, la relación es sólo no decreciente. Ver pág. 358 en FCE de *Lecturas de teoría de la Producción*, de Pasinetti.

(d16) $$R = \frac{1-u}{u} = \frac{1-f(A=XY^{-1})}{f(A=XY^{-1})}$$

Y, por último, tenemos también la relación de Sraffa para la producción simple con salarios *post-factum* entre salarios y ganancias:

(d17) $$r = (1-w)R$$

Con ello obtenemos (d18):

(d18) $$\boxed{r = (1-w) \times \frac{1-f(XY^{-1})}{f(XY^{-1})}}$$

Y si despejamos la tasa de salarios queda:

(d19) $$\boxed{w = \frac{1-f(XY^{-1})\left[1+r\right]}{1-f(XY^{-1})}}$$

En (d18) están relacionadas 4 de los 6 grupo de variables que entran en el modelo de Sraffa: tasa de ganancia, tasa de salarios, medios de producción y productos finales. Los inputs de trabajo ***L*** no aparecen, aunque para llegar a (d17) hemos tenido que tomar la suma de los inputs de trabajo como numerario, es decir, hacer ***L*I**=**1**. Pero lo más importante de todo ¡es que no están los precios! De (d18) sale que la tasa de ganancia ***r*** es inversamente no proporcional a la relación *medio de producción/producto final* (en terminología neoclásica, *capital/producto*) $\boldsymbol{XY}^{-1}$. Esta última relación es análoga a la neoclásica, pero con diferencias notables: 1) En el modelo neoclásico hay que suponer que se puede obtener una función de producción que resulte de la agregación de medios de producción en términos físicos sin mediar los precios. Ello se ha demostrado un hecho incoherente; aquí los medios de producción y los productos finales están tomados ¡directamente de la realidad! sin necesidad de agregación; 2) Aquí la tecnología -que está representada por la matriz ***A***- es un dato de la realidad, pero en el modelo neoclásico ha de ser endógena al modelo si se quiera que tenga su propia retribución; 3) En el modelo neoclásico hay que hacer fuertes supuestos sobre los mercados, la competencia, los bienes públicos, efectos externos, competitividad y sobre todo, rendimientos decrecientes; aquí no es necesario ninguno de esos supuestos, ni siquiera hay que suponer ningún tipo de rendimientos *a priori* como quería Sraffa, aunque él lo dejaba al gusto del lector[39].

Para completar la crítica al modelo neoclásico partiendo de los supuestos de Sraffa – que en principio esa es su intención en este capítulo, aunque quede diluida por todo lo comentado- debemos traer aquí los precios para analizar la influencia de la tasa de salarios y de ganancia en el modelo. Despejados los precios de la ecuación de definición del sistema tenemos:

(d20) $$P = wLY^{-1}\left[I-(1+r)A\right]^{-1}$$

[39] Prefacio a *PMPM.*

y si sustituimos la tasa de salarios de (d19) en (d20) sale:

(d21) $$\boxed{P = \frac{1 - f(XY^{-1})[1+r]}{1 - f(XY^{-1})} \times LY^{-1}\left[I - (1+r)XY^{-1}\right]^{-1}}$$

En la teoría neoclásica-marginalista[40], esta relación vendría dada por:

(d22) $$P = \frac{r}{dY/dK} \quad con \quad \frac{dY}{dK} > 0 \quad y \quad \frac{d^2Y}{dX^2} < 0$$

siendo ***K*** el capital, es decir, el equivalente a los medios de producción ***X*** de Sraffa. Frente a la simpleza de la formación de los precios en este modelo neoclásico en el que estos tienen una relación monótona creciente (d22) respecto a la tasa de ganancia (de interés), en (d21) no hay una relación decreciente o creciente única al variar la tasa de ganancia (interés), porque en el primer quebrado donde aparece la tasa de ganancia ***r*** de (d21) es decreciente, pero es creciente por la expresión que hay entre corchetes[41]. El resultado es ambiguo, pudiendo pasar de una relación decreciente a otra creciente a medida que aumentan la tasa de ganancia; también podría darse la secuencia contraria, porque no sabemos a priori el valor de $\boldsymbol{XY}^{-1}$. Esta es una manera de refutar el modelo neoclásico que se le escapó a Sraffa por su obsesión con llegar a todas partes –o a casi todas- sin la muleta del modelo formal que él mismo creó. En el caso de que la tasa de ganancia fuera cero, (d21) quedaría:

(d23) $$P = LY^{-1}\left[I + A + A^2 + \Lambda + A^{n-1}\right] \quad \text{con} \quad A = XY^{-1}$$

En ese caso particular, el modelo neoclásico y el *esrafiano* coinciden porque los precios son directamente proporcionales a la relación “capital (medios)/producto” en ambos casos. También son proporcionales a los inputs de trabajo, con lo cual entraríamos en la polémica de la teoría del valor-trabajo. No lo hacemos.

Vamos a ver un ejemplo de la discusión de Sraffa en este capítulo que resulta equivocado y sólo el uso del instrumental formal lo aclara. Dice Sraffa textualmente que “*si trazamos dos líneas que muestran cómo varían el precio de un producto y el salario, expresados ambos en términos de la mercancía-patrón, a medida que se eleva el tipo de beneficio, la línea de precio no puede cortar a la línea de salario más de una vez*”[42]. Para comenzar el problema que se plantea Sraffa es insoluble, porque precios y salarios no pueden estar en la misma ordenada dado que son variables *cualitativamente* diferentes, y eso no cambia por más que se dividan por la mercancía patrón. Pero vamos a suponer que el problema a plantear fuera el de si *la frontera de salarios-ganancias* que surge de la relación salarios-ganancia corta ¿una sola vez? a la recta de la ecuación de la razón patrón ***r***=(**1**-***w***)***R***. El sentido económico de esta comparación –que deber ser el fin siempre del análisis económico- es si el salario determinado por el modelo de Sraffa es siempre proporcional a la razón-patrón o no, es decir, si cuando uno sube el otro también sube y si lo hace linealmente. De ser así,

[40] Aquí entran en el mismo saco, pero un historiador del pensamiento económico haría distingos.
[41] Esta ecuación podría valer para analizar el desplazamiento en los métodos de producción del capítulo XII de PMPM.
[42] Pág. 63 de *PMPM* (epígrafe 49).

la relación de los salarios que surgen de la ecuación de definición del sistema (d24) sólo debería cortar una vez –a lo sumo- al salario de la razón-patrón (d17). Una primera tentación –ingenua- sería la de sustituir directamente los salarios de una ecuación en la otra para hallar los puntos de corte. La razón de esta ingenuidad es que entre ambas ecuaciones median los precios, y ello distorsiona cualquier posible conclusión porque estaríamos con el problema ricardiano de la influencia de los precios en las variables distributivas del sistema. Para dar una solución inane a los precios traemos a colación las 4 ecuaciones que definen el sistema de producción simple de Sraffa

(d24) $$PY = wL + (1+r) \times PX$$

(d25) $$PY = (1+g_m) \times PX$$

(d26) $$PYI - PXI = 1$$

(d27) $$LI = 1$$

Sabemos que si $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ cumple el teorema de *Perron-Froebenius* que ya hemos comentado, entonces la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ en (d25) es la razón-patrón de Sraffa, es decir, $\boldsymbol{g}_m=\boldsymbol{R}$. De la (d24) sale que:

(d28) $$P = wLY^{-1}\left[I - (1+r)A\right]^{-1}$$

siendo $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$. De (d25) y (d26), y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{g}_m=\boldsymbol{R}$, se obtiene que:

(d29) $$PXI = \frac{1}{R}$$

Pues bien, post-multiplicando (d28) por ***XI*** y teniendo en cuenta (d29) obtenemos:

(d30) $$w = \frac{1}{RLY^{-1}\left[I + (1+r)A + (1+r)^2 A^2 + \ldots + (1+r)^{n-1} A^{n-1}\right]XI}$$

Y (d30) es una curva decreciente entre tasa de salario ***w*** y tasa de ganancia ***r***. Si ahora queremos buscar los puntos de corte con la ecuación de la razón patrón de Sraffa:

(d31) $$w = \frac{R-r}{R}$$

no tenemos más que resolver ambas ecuaciones eliminando, por ejemplo, la tasa de salarios entre ambas y queda (d32):

$$(R-r)LY^{-1}\left[I + (1+r)A + (1+r)^2 A^2 + \Lambda + (1+r)^{n-1} A^{n-1}\right]XI = 1$$

que es un polinomio en ***n*** de ***r***, es decir, con ***n*** máximas posibles soluciones reales de ***r*** y de su correspondiente ***w*** en (d31), y donde no están los precios. Dicho de otra forma, la interpretación que hemos hecho del problema mal planteado de Sraffa nos lleva a que *la curva frontera salarios-ganancia* de Sraffa puede llegar a cortar hasta ***n*** veces *la recta de la razón-patrón*, lo cual supone además que hubiera hasta ***n*-1** posibles cambios de convexidad. Además, todo lo anterior es una prueba más del retorno de las técnicas entre dos métodos si consideramos que la razón-patrón es, en sí misma, un método de producción[43].

E - Producción conjunta[44]

Antes de entrar en el esquema de producción conjunta de Sraffa hay que advertir que, con serlo, es un caso muy particular de producción conjunta, porque el economista italiano va a trabajar con procesos -y aquí la idea de empresa se difumina y se abre al sector porque ya son varias las empresas que pueden producir la misma mercancía- en los que el número cualitativo de bienes producidos en la producción conjunta es el mismo que el de medios empleados, independientemente de si es una empresa que produce varios productos o son variadas empresas la que producen un mismo producto. La producción conjunta es típica del primer caso. Oigamos a Sraffa como lo explica: "*Supondremos ahora que dos de las mercancías son producidas conjuntamente por una sola industria* (*o mejor, por un sólo proceso, pues esta denominación resulta más apropiada en el presente contexto*)"[45]. En cuanto a la necesidad de la igualdad de mercancías y procesos lo dice explícitamente porque de lo contrario: "*habría más precios a determinar que procesos y, por tanto, habría más precios a determinar que ecuaciones para determinarlos*"[46]. Aquí Sraffa se pliega a las matemáticas dejando la semilla de este tipo de producción un poco seca. A pesar de todo da para mucho y se puede ampliar sin caer en un mero empirismo. La ecuación *esrafiana* que define el sistema de producción conjunta más sencillo es como sigue:

(e1) $$PY = (1+r)\,PX + wL$$

Aparentemente nada nuevo con respecto a la producción simple. La sola diferencia -claro, que cualitativamente esencial- es que ahora la matriz ***Y*** de productos finales *no* es una matriz diagonal con ceros en los elementos de la matriz que no sea la diagonal principal, sino que ahora todos sus elementos pueden tener un valor mayor que cero (aunque algunos puedan ser cero). Ya hemos explicado que el problema ahora es que no podemos obtener la razón-patrón conjuntamente con los multiplicadores mediante el sistema de ***n*+1** ecuaciones ***uYQ***=***XQ*** e ***L*I**=**1** utilizando *Perron-Froebenius*. Antes de seguir vamos a obtener otra ecuación –que va a ser habitual- haciendo cero la tasa de salario ***w***:

(e2) $$PY = (1+g_m)\,PX$$

[43] Cosa que podemos hacer con toda justeza como supuesto *ad hoc* dado que hasta el mismo Samuelson –como veremos- intentó construir con su función surbrogada (Samuelson, 1962) una curva convexa con una envolvente de ***n*** rectas entre las variables salarios y ganancias cuando ***n*** se hacía infinito

[44] Quizá se el mayor especialista en la producción Bertram Schefold. Aquí es recomendable su trabajo *Joint Production: Triumph of Economic over Mathematical logic?*, en *Piero Sraffa: The Man and The Scholar*, 2008, edit. Routledge.

[45] Pág. 67 de *PMPM.*

[46] Pág. 67 de *PMPM.*

En (e2) hemos sustituido la razón-patrón ***R*** de la producción simple por $\boldsymbol{g}_m$ como *tasa máxima de ganancia*, porque ahora no tenemos una razón-patrón o, al menos, no la tenemos echando mano de nuestra pareja Perron y Frobenius. Entre (e1) y (e2) obtenemos (e3):

(e3) $$\boxed{P = \frac{w}{g_m - r} \times LX^{-1}}$$

donde, como siempre, los precios aumentan con el aumento de la tasa de salarios ***w***, la tasa de ganancia ***r***, y disminuyen al aumentar la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ y el vector de la relación capital/trabajo $\boldsymbol{LX}^{-1}$. Además, los precios aumentarán exponencialmente si al aumentar ***r***, esta tasa está ya muy cerca de la tasa máxima posible $\boldsymbol{g}_m$.

Vamos ahora a establecer el mismo sistema de ecuaciones *esrafiano* que teníamos en la producción simple:

(e4) $$PY = wL + \left(1 + r\right)PX$$

(e5) $$PY = \left(1 + g_m\right)PX$$

(e6) $$LI = 1$$

(e7) $$PYI - PXI = 1$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones sale, como cabía esperar, la ecuación que relaciona ***w***, ***r*** y $\boldsymbol{g}_m$:

(e8) $$\boxed{r = (1 - w)\, g_m}$$

La diferencia respecto a la reproducción simple, es que aquí no tenemos la razón-patrón ***R*** calculada aparte con ***uYQ***=***XQ*** e ***L*I**=**1** (teniendo en cuenta la relación ***R***=(**1**-***u***)/***u***), porque no estamos en la producción simple y ya hemos visto que la matriz de productos finales ***Y*** no es una matriz diagonal. Con ello *no* se puede asegurar que algunos de los ***n*** precios *no* sean negativos. Es verdad que le queda a Sraffa una forma, un último recurso de obtener lo que el sigue llamando reiteradamente razón-patrón como el que "*corresponde al mínimo valor posible de **R***"[47]. En definitiva, lo que podríamos llamar método manual de ordenación de los *productos netos relativos* o *excedentes relativos* de todas las mercancías. Ello tendrá siempre la ventaja de que, conocido ese menor excedente relativo, sabremos que la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ tiene que ser menor que el excedente así calculado. Con ello quedará un margen para que la tasa de salarios ***w*** sea positiva. Añade Sraffa que también esa razón-patrón así elegida es "*el único producto patrón en términos del cual es posible que el precio de las mercancías sean finitos para todos los valores del salario desde* **1** *a* **0**"[48]. Y Sraffa tiene razón viendo la ecuación (e3), donde mientras la tasa de ganancia ***r*** sea menor que la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$, los precios serán positivos en este

[47] Pág. 79 de *PMPM.*
[48] Pág. 80 de *PMPM.*

modelo de producción conjunta. Todo ello es cierto, pero lo que no lo es -mientras alguien no demuestre lo contrario- es que $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ sea una medida del valor del excedente invariante a los precios; tampoco es cierto que $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ tenga que coincidir con la razón-patrón ***R*** como ocurría en la producción simple[49]. En la producción simple estábamos seguro de ello porque se obtenía de las supuestas propiedades de la matriz ***A*** de requerimientos, matriz que surgía y dependía *sólo* de los valores físicos de los medios de producción ***X***, de los productos finales ***Y*** ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$) y de los *inputs* de trabajo ***L***, (debido a que tomamos como numerario ***LQ*** con ***LQ***=**1**) y aplicando a todo ello *Perron-Froebenius*. Ahora no es el caso, porque $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ surge de hacer cero los salarios en la ecuación (e4) que define el sistema, donde están los precios. Tenía *además* la propiedad de estar relacionado con el autovalor mayor ***u*** de ***A*** mediante $\boldsymbol{R}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$. En cambio, $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ no tiene esa propiedad. Y si empleamos el método de ordenación de mayor a menor -que emplea Sraffa como hemos visto-, eligiendo el menor valor de los *productos netos relativos* o *excedentes relativos*, eso no nos garantiza que esa relación sea la misma que la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ surgida de hacer cero los salarios antes comentada; tampoco asegura un vector de precios positivos[50]. Ya hemos visto anteriormente la diferencia entre tasa máxima de ganancia y razón-patrón.

Otra forma de ver lo anterior es despejando los precios en la ecuación (e4) que define el sistema y da:

(e9) $$P = wLY^{-1}\left[I-\left(1+r\right)A\right]^{-1}$$

Aparentemente es la misma ecuación que surgía de despejar los precios en la producción simple, pero esta la diferencia: la matriz ***Y*** de productos finales ya *no* es diagonal, y cabe de esperar que algunas de las mercancías sean producidas por una misma empresa (sector). En la producción simple, todos los elementos de la inversa de los productos finales ***Y*** eran positivos porque lo eran los valores de ***Y***; en la producción conjunta puede ocurrir -y matemáticamente ocurre- que algunos de sus elementos sean negativos (los inversos de ***Y***). Con ello, y a pesar de que la inversa de la expresión entre corchetes de la ecuación (e9) sea positiva (porque la tasa de ganancia ***r*** no supere el valor menor del excedente neto relativo del conjunto de las mercancías), algunos de los precios pueden ser negativos porque lo sean los valores de la inversa de ***Y*** en el caso de la producción conjunta que, como hemos comentado, todos sus elementos pueden tener algún valor. La explicación económica de este hecho es que ahora, a diferencia de la producción simple, no podemos hacer corresponder los ***n*** sectores a una sola mercancía, sino a varias, y lo que antes podíamos decir de una mercancía final en ***Y***, ahora lo tenemos que decir de una suma. Ello lleva a que algunos de los elementos de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ puedan ser negativos y simultáneamente el resultado de la suma (filas) de ***A*** sean positivos. Damos las dos matrices de ***Y*** según ambos tipos de producción:

(e10) $$Y=\begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} \Rightarrow Y^{-1}=\begin{bmatrix} 1/y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/y_n \end{bmatrix}$$ producción simple

[49] Lo demostramos más adelante.

[50] Es más, con Perron-Frobenius puede darse un vector de precios ***P*** estrictamente positivo (todos) con una matriz de requerimientos $\mathbf{A}=\mathbf{XY}^{-1}$ no productiva.

(e11) $$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & \Lambda & y_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ y_{n1} & \Lambda & y_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow Y^{-1}=\begin{bmatrix} \hat{y}_{11} & \Lambda & \hat{y}_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ \hat{y}_{n1} & \Lambda & \hat{y}_{nn} \end{bmatrix}$$ producción conjunta

Vistas las dificultades de encontrar una razón-patrón en la producción conjunta con las mismas propiedades que la encontrada en la producción simple, Sraffa recurre a su distinción que procede del capítulo II de su libro entre bienes básicos y no básicos, sólo que esa diferenciación no resulta válida ahora según establece el propio Sraffa. Recordemos que Sraffa decía en ese capítulo que bienes básicos eran aquellos que entraban en la producción *en todos los demás bienes* (incluido, supuestamente, el mismo) y los que no cumplían esta condición eran productos no básicos. Con ello conseguía una diferenciación dicotómica. Sin embargo, cuando llevó esa distinción de blanco o negro entre uno y otro tipo de bienes se dio cuenta -o le advirtieron desde un punto de vista matemático- de que debía ampliar el criterio. Incluso tuvo que recurrir a un apéndice para advertir del caso de bienes no básicos con auto-reemplazamiento[51]. La razón de este cambio de criterio -o de ampliación- es la de que no quería renunciar a uno de los objetivos de su libro y de su vida: buscar una *mercancía-patrón* y una *razón-patrón* invariantes al movimiento de los precios y solucionar el problema que no solucionó *David Ricardo* y solucionó mal *Carlos Marx*. Recordemos que una matriz $\boldsymbol{A}$ que fuera cuadrada, no negativa e irreductible[52] tiene -por el teorema de *Perron-Froebenius*- un *autovalor* único, simple, real y positivo que lleva asociado dos autovectores (uno por la derecha y otro por la izquierda) con todos sus elementos positivos. Con esto, en la producción simple obteníamos la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ y los precios $\boldsymbol{P}$ (autovector por la izquierda) y/o los multiplicadores $\boldsymbol{Q}$ (auto-vector por la derecha) <u>todos positivos</u>. En la producción conjunta no podemos asegurar eso si aceptamos todas las ecuaciones de origen del sistema $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ por lo comentado en el punto y aparte anterior. Ahora bien, si logramos desgajar de $\boldsymbol{A}$ una *sub-matriz* que cumpla los requisitos del teorema de *Perron-Froebenius*, habremos alcanzado éxito en la búsqueda de la razón-patrón, aunque ya no tengamos todas las ecuaciones originales si podemos, como dice Sraffa, "*eliminar completamente mediante transformaciones lineales las mercancías no básicas del sistema, tanto del lado de los medios de producción como de los productos*"[53]. Matemáticamente significa, primero, que cabe siempre la posibilidad de que, a partir de una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}_{nxn}$, puede ser reducida a un conjunto de sub-matrices de la forma:

(e12) $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \Lambda & a_{1n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ a_{n1} & \Lambda & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{n-k,n-k} & A_{n-k,n} \\ A_{n,n-k} & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

donde las sub-matrices $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ y $\boldsymbol{A}_{n,n}$ son cuadradas. Si ahora, por los ceros que pueda haber en filas y columnas, se pueden intercambiar estas de tal modo que la sub-matriz $\boldsymbol{A}_{n,n-k}$ valga cero, entonces se habrá reducido la matriz $\boldsymbol{A}$. El problema es que esto no es siempre posible. Sraffa cree que lo es si "*en un sistema de **n** procesos productivos y **n** mercancías, decimos que una mercancía o, en general, un grupo de **k** mercancías relacionadas son no básicas si de las **n** filas no más de **k** filas son independientes, siendo las otras combinaciones lineales de éstas*"[54]. Dicho de otra

[51] Pág. 125 de *PMPM.*
[52] Si es reductible los precios son no negativos (es decir, algunos pueden ser cero).
[53] Pág. 77 de *PMPM.*
[54] Pág. 76 de *PMPM.*

manera si, intercambiando filas o columnas en la matriz $\boldsymbol{A}_{n,n}$ original, conseguimos que $\boldsymbol{A}_{n,n-k}=\mathbf{0}$ y que el rango de la matriz $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ valga $\boldsymbol{n-k}$, es decir, que todas ecuaciones de $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ tal que $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k} = (\boldsymbol{X}_{n-k,n}\, \boldsymbol{Y}^{-1}_{n-k,n-k})$ sean linealmente independientes y que sus elementos sean no negativos (ya es cuadrada la sub-matriz por hipótesis). En este estas condiciones se puede aplicar la versión débil[55] del teorema *Perron-Froebenius* y *habemus* mercancía-patrón y razón-patrón[56] positiva menor que **1** (esto último sólo si además $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ es productiva), aunque sólo sea para $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$. Ahora, y como hace Sraffa, llamamos *bienes básicos* a los que entran en esa sub-matriz y eso nos asegura un vector $\boldsymbol{P}_{n-k}$ de precios no negativos y también un vector por la derecha $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ de $\boldsymbol{Q}_{n-k}$ de $\boldsymbol{n-k}$ multiplicadores no negativos para componer la mercancía patrón. El problema es que nada garantiza que, partiendo de la realidad, podamos reducir la matriz original $\boldsymbol{A}$ a un conjunto de sub-matrices con las características enunciadas. El coste que Sraffa ha pagado por esta redefinición[57] y distinción entre bienes básicos y no básicos es, como el mismo Sraffa reconoce, si "*cabe preguntarse si ha conservado algún contenido económico*"[58]. El problema es que el economista italiano no podía elegir si quería ser riguroso y, afortunadamente, eligió el rigor, aunque por lo que hemos visto, con un exceso de optimismo. Aún así, la distinción sigue teniendo sentido económico.

<u>Nuevo criterio en la definición de bienes básicos y no básicos</u>

Sraffa, a medida que maduraba su obra, se dio cuenta, como queda dicho, que no podía mantener la distinción entre bienes básicos tal y como la había dejado en el capítulo II y ahora en el VIII habla de 3 tipos[59]: 1) El sector de bienes básicos señalado, que viene caracterizado matemáticamente por la submatriz $\boldsymbol{A}_{n-k,n-k}$ de *bienes básicos* que se venden y compran entre sí de tal manera que constituyen una economía capaz de entrar en el modelo *esrafiano* de la producción conjunta y calcular *la mercancía-patrón*, *la razón-patrón*, *la tasa de ganancia*, *la tasa de salarios* y *los precios* (no necesariamente todos positivos) <u>por sí solos</u>, sin necesidad de saber qué pasa con los sectores y mercancías del resto; 2) Este segundo grupo está constituido a su vez por dos: un conjunto de sectores $\boldsymbol{A}_{n,n-k}$ que se compran y se venden entre ellos y venden (pero no compran) a los del grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$. Por hipótesis, esta sub-matriz $\boldsymbol{A}_{n,n-k}$ valdría cero. El grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$ que, en cambio, sí compra del resto del sistema (las columnas que están por encima y que se corresponden con la sub-matriz $\boldsymbol{A}_{n-k,n}$ tienen valores positivos, aunque no necesariamente todos), pero sólo se venden entre ellos. Por tanto, este grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$, que se corresponde con la nueva visión *esrafiana* de bienes *no básicos*, sí depende del resto del sistema para calcular sus precios de producción. Además, si existe una sola tasa de ganancia y una sola de tasa salarios, este sector debe aceptar los calculados por los del grupo primero de bienes básicos. Dicho de otra manera, ha perdido la libertad de fijar o influir en las variables

---

[55] La versión débil porque la matriz original no era irreducible sino reducible, cosa que hemos hecho.
[56] Tal y como la podemos tener para la producción conjunta que ya hemos explicado.
[57] La definición de bienes básicos que hemos comentado del capítulo II ya no vale porque en la submatriz reducida, donde se han ubicado por la nueva definición los productos básicos, puede haber algunos ceros, es decir, que puede haber sectores que no vendan a todos los demás. Y hay que decir que afortunadamente, porque probablemente no exista en la realidad *un sólo sector* que venda *a todos* los sectores de la economía directamente.
[58] Pág. 80 de *PMPM.*
[59] Pág. 74 de *PMPM*. Aquí he preferido seguir la lógica económica de Sraffa, pero con la ecuación (55), por lo que no me he atenido literalmente al texto. De hecho, el grupo segundo mío del texto corresponde al tercero de Sraffa y viceversa.

monetarias del sistema; 3) El grupo constituido por la sub-matriz $\boldsymbol{A}_{n\text{-}k,n}$ compra a los sectores del grupo de bienes básicos, pero no les vende a ninguno y, en cambio, si venden a los del grupo de no básicos $\boldsymbol{A}_{n,n}$. Además, al no ser la sub-matriz $\boldsymbol{A}_{n\text{-}k,n}$ cuadrada, no tiene ninguna opción de tener una razón-patrón y una mercancía-patrón propias, y debe aceptar también la tasa de salarios, de ganancias y precios impuestos por los del grupo de básicos $\boldsymbol{A}_{n\text{-}k,n\text{-}k}$. Como siempre ocurre, al no hacer explícitos Sraffa los desarrollos formales -matemáticos- en los que se basa sus disquisiciones económicas, éstas se hacen difíciles de seguir y también de asentar los supuestos que encierran. Más tarde veremos con ecuaciones estos temas.

Existe una posibilidad de que la sub-matriz $\boldsymbol{A}_{n\text{-}k,n}$ fuera cero. Eso supondría, desde el punto de vista económico, que los sectores del grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$ no comprarían a los sectores del grupo anterior (las columnas que quedarían por encima valdrían cero en este supuesto); además, y dado que ya no vendían a ningún sector (hemos partido de que $\boldsymbol{A}_{n,n\text{-}k}$ vale cero), eso significaría que los sectores del grupo $\boldsymbol{A}_{n,n}$ serían un grupo independiente del resto de la economía (no conectado) que sólo compran y venden entre sí. Si los sectores de la matriz $\boldsymbol{A}_{n,n}$, que es cuadrada, cumplieran las condiciones de *Perron-Froebenius,* podrían calcular sus propios precios, tasas de ganancia, salarios, etc., al igual que lo han hecho los sectores del primer grupo. Se trataría de una economía aparte, equivalente en el mundo real a una economía que no comerciara con el resto del mundo. Sraffa lo analice en el apéndice **B** de su libro.

Resumiendo, podemos distinguir cuatro grupos de sectores económicos en función de la relaciones de compra-venta que mantienen con los demás: 1) los que se compran y se venden a todos los demás; 2) los que venden a los demás –y a sí mismos- pero sólo se compran a sí mismos; 3) los que sólo se venden a sí mismos, pero compran a todos los demás; 4) los que sólo compran y venden entre sí. El primero es autónomo y determina la tasa de ganancia y de salarios de todo el conjunto; el último está aislado del resto en cuanto a relaciones de compra-venta, pero son *salario y ganancia-aceptantes* y no pueden influir en el resto de los grupos: es un grupo aislado del resto. La primera división entre productos básicos y no básicos de Sraffa ha quedado obsoleta y esta nueva división esrafiana alumbra una posible teoría de los mercados en las que los precios no juegan un papel relevante, sino las tasas de ganancia, de salarios y las relaciones intersectoriales.

No disponemos de mucho más espacio para alargar esto, pero el paso del modelo de producción simple al de producción conjunta que da Sraffa, con ser importante y aleccionador sobre las posibilidades de sus sistema respecto al modelo neoclásico, no es suficientemente general. La razón es la de que Sraffa siguen manteniendo igual el número de sectores que de mercancías (las matrices $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ siguen siendo cuadradas). La otra forma de generalización es precisamente distinguir explícitamente entre bienes básicos y no básicos. Veámoslas:

<u>Generalización I</u>

Un modelo más general de producción conjunta que el analizado por Sraffa sería aquel que vendría dado por $\boldsymbol{n}$ tasas de salario $\boldsymbol{w}_{ij}$ y $\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia $\boldsymbol{g}_{ij}$ y donde el número de productos finales $\boldsymbol{m}$ es distinto de el de medios de producción $\boldsymbol{n}$. Por ello, también el vector de precios de productos finales $\boldsymbol{P}_y$ será distinto de el de precios de medios de producción $\boldsymbol{P}$. Si, además, calculamos las ganancias como un porcentaje de todos los costes (incluidos los laborales, es decir, *pref-factum*). La ecuación generalizada quedaría como:

(e13) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} + \underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W}\right](I_d + \underset{nxn}{G})$$

con ***W*** y ***G*** como matrices diagonales. Si hacemos ahora cero a los salarios queda la ecuación:

(e14) $$P_y Y = PX(I_d + G_m)$$

con $\boldsymbol{G}_m$ como matriz diagonal de tasas de ganancia máximas e $\mathbf{I}_d$ como vector de uno ***n***x**1**. Si ahora eliminamos términos comunes entre la (e13) y la (e14), obtenemos:

(e15) $$P = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}X^{-1}$$

A su vez, entre la (e14) y la (e15) sale la ecuación de los precios de los productos finales dependiente de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$:

(e16) $$\boxed{P_y = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}(I_d + G_m)Y^T\left[YY^T\right]^{-1}}$$

La ecuación (e16) merece un comentario sobre el uso de las matemáticas. En apariencia, en esta ecuación los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$ no dependen de los precios de los medios de producción, cosa que ocurriría si despejáramos los productos finales en la ecuación (e13) que define el sistema en este modelo de producción conjunta generalizada no *esrafiana*, pero sin diferenciación entre productos básicos y no básicos. No obstante, eso es sólo la apariencia, porque $\boldsymbol{P}_y$ depende de las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$ y estas dependen de los precios en (e14), salvo que la sustituyamos por el método *esrafiano* de obtener la razón-patrón mediante la ordenación de los *excedente netos relativos* de todos los sectores y la elección del más bajo. No obstante, eso no garantiza que ese menor excedente neto relativo coincida con $\boldsymbol{G}_m$, aunque pueda estar muy cerca.

Generalización II

Otro modelo matemático de economía que ahora distinguiera de entrada entre productos básicos y no básicos sería el expresado por la ecuación:

(e17) $$\underset{1xm}{P_N}\underset{mxn}{Y_N} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X}\right]\left[I + G\right]$$

Los productos finales no básicos estarían dados por la matriz $\boldsymbol{Y}_N$, y $\boldsymbol{P}_N$ son sus precios. Ahora la dimensión de $\boldsymbol{Y}_N$ es ***m***x***n***, es decir, el número de bienes no básicos no tiene porqué coincidir con los básicos. El supuesto de que ***m***=***n***, es decir, que sea el mismo el número de bienes cualitativamente distintos en los medios que en los productos finales - caro a Sraffa- no puede ser mantenido si se quiere dotar de realismo el modelo de producción conjunto. Con el nuevo supuesto tenemos dos vectores de precios, uno para los básicos y otros para los no básicos, que es lo indicado -insistimos- en aras del realismo. De (e17) se pueden despejar los precios $\boldsymbol{P}_N$ de los no básicos y queda:

(e18) $$\boxed{P_N = \left[LW(I_d + G) + P\left[X(I_d + G) - Y\right]\right]Y_N^T\left[Y_N Y_N^T\right]^{-1}}$$

En (e18) se ve que los precios de los bienes no básicos $\boldsymbol{P}_N$ dependen de los básicos, pero no al revés. Es verdad que matemáticamente podríamos haber dejado como variable dependiente los precios de los básicos, pero el sentido económico de la discusión que llevamos, siguiendo la inestimable guía del maestro italiano, haría que tal verdad sólo matemática no tuviera sentido económico. De todas formas, poco nos dice en esta ocasión (e18) de los precios de los no básicos porque, a diferencia de anteriores posibles modelos de producción conjunta que hemos visto, estamos jugando ahora con dos vectores de precios distintos. Obtenemos ahora una nueva ecuación haciendo como siempre cero *la matriz* de salarios $\boldsymbol{W}$:

(e19) $$P_N Y_N + PY = PX(I_d + G_m)$$

Y entre (e17) y (e19) sale como siempre:

(e20) $$P = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}X^{-1}$$

donde nos hacemos con los precios de los básicos y donde, como siempre, para que los precios no aumenten exponencialmente, es condición necesaria que las tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$ no se acerquen a las tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{G}_m$. Si ahora sustituimos los precios de (e20) en (e18) queda:

(e21) $$\boxed{P_N = LW(I_d + G)(G_m - G)^{-1}\left[I_d + G_m - X^{-1}Y\right]Y_N^T\left[Y_N Y_N^T\right]^{-1}}$$

Es verdad que ahora los precios $\boldsymbol{P}_N$ de los no básicos no aparecen como dependiendo de los precios de los básicos, pero ya hemos comentado que eso es pura apariencia, porque para ello hemos de suponer que las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$ no dependan de los precios, y no podemos, bajo estos supuestos, traer a colación a *Perron-Frobenius*.

Con ambas generalizaciones queda claro las potencialidades del modelo de Sraffa, aunque se pierdan por el camino las queridas *razón-patrón y mercancía-patrón* que ya algunos autores (Schefold) consideran que deben abandonarse. No hemos entrado en discutir sobre en tema de los multiplicadores -que tantas líneas dedica Sraffa- en la producción conjunta y sólo apenas algún comentario sobre la mercancía patrón porque ambos temas apenas tienen interés para el desarrollo de su sistema.

Todo lo anterior se ha presentado como una guía para entender los capítulos (tres) de Sraffa sobre la producción conjunta que, además, los presenta Sraffa como una introducción a los capítulos referidos a los del "*Capital Fijo*" y "*Tierra*"[60]. Los modelos de producción conjunta supone un gran avance en aras del realismo, pero no están

[60] Pág. 67, Nota (1) a pie de página.

exento de nuevas dificultades. Hemos visto que, de momento, se ha perdido la posibilidad de tener una razón-patrón independiente de los precios como ocurría en la producción simple. Ahora hay que señalar otra dificultad añadida. En las dos generalizaciones anteriores se ha distinguido entre productos básicos y no básicos. A los primeros se les hacía corresponder ***n*** mercancías[61] y a los segundos ***m*** mercancías. Sin embargo, nada hemos dicho sobre si ***m*** es mayor que ***n***, es menor o es igual. Estos supuestos son esenciales en aras también del realismo. El ideal desde el punto de vista matemático es que se cumpla que ***m***=***n*** porque así la inversa de los bienes no básicos $\boldsymbol{Y}_N$ es cuadrada y fácilmente invertible. De no ser cuadrada, es muy preferible que ***m*** fuera menor que ***n***, porque así la inversa de $\boldsymbol{Y}_N\boldsymbol{Y}_N^T$ existe y sus elementos de filas y columnas tienen valores concretos. Sin embargo, eso puede parecer poco realista, porque eso supone que necesariamente el número de bienes básicos distintos ha de ser mayor que el bienes no básicos distintos. Nos queda, como cosa natural y acorde con la realidad, que ***m*** sea mayor que ***n***. El problema de esta hipótesis es que la inversa de $\boldsymbol{Y}_N\boldsymbol{Y}_N^T$ da valores infinitos para sus elementos. Ello tiene una explicación económica. Si ***m*** es mayor que ***n*** tenemos mayor número de incógnitas que ecuaciones y estamos ante un proceso económico sub-determinado para los precios. En realidad tenemos infinitos grados de libertad. Sraffa recurre en estos casos anómalos –al igual que la tendencia de precios al infinito en el caso de las habas o cuando pueden ser negativos– a lo que podríamos llamar realismo sociológico, diciendo que serán los propios empresarios, gestores y/o capitalistas los que elegirían procesos que evitaran tales dislates[62].

<u>Anexo E1: Producción simple</u>

PY=(1+g)PX+wL

				sumas					sumas
	13	0	0	**13**		4	4	3	11
Y=	0	11	0	**11**	X=	3	5	2	10
	0	0	20	**20**		4	8	4	16
w=	0,7	g=	**4%**		L=	0,4	0,5	0,1	1
	0,077	0,000	0,000			0,308	0,364	0,150	
Y^{-1}=	0,000	0,091	0,000		$A=XY^{-1}$	0,231	0,455	0,100	
	0,000	0,000	0,050			0,308	0,727	0,200	

$P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}$= 0,07 0,15 0,04

[61] Bienes y servicios en lenguaje moderno.
[62] Ver pág. 87 de *PMPM.*

Anexo E2: Producción conjunta

PY=(1+g)PX+wL

				sumas					sumas
	3	4	6	**13**		4	4	3	11
Y=	7	2	2	**11**	X=	3	5	2	10
	5	3	12	**20**		4	8	4	16
w=	0,7	g=	**4**%		L=	0,4	0,5	0,1	1
	-0,10	0,17	0,02			1,09	0,36	-0,35	
Y^{-1}=	0,42	-0,03	-0,20		$A=XY^{-1}$	1,67	0,22	-0,70	
	-0,06	-0,06	0,13			2,70	0,16	-1,05	

$\mathbf{P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}=}$	**0,46**	**0,16**	**-0,16**

Puede comprobarse en estos anexos E1 y E2 que, a pesar de que la suma del producto final de cada mercancía (fila) es la misma en la producción simple que en la conjunta, el resultado de su inversa $\boldsymbol{Y}^{-1}$ es distinto, por lo que los precios finales son distintos (y en el caso de la conjunta, uno de ellos es negativo). En cuanto a la matriz ***A*** de requerimientos tiene elementos negativos en la producción conjunta y no puede haberlos en la producción simple.

Anexo E3: Generalización

Precios en producción conjunta y tasa máxima

$$P=LW(1+G)(G_m-G)^{-1}X^{-1}$$

W=

0,5		
	0,7	
		1

L=

			suma
0,3	0,4	0,3	1

G=

15,0%		
	21,0%	
		19,0%

G_M=

			G_M-G
30,0%			15,0%
	25,0%		4,0%
		20,0%	1,0%

X=

2	3	7
4	9	4
7	1	6

X^{-1} =

-0,166	0,037	0,169
-0,013	0,123	-0,066
0,196	-0,063	-0,020

G_M-G=

15%	0%	0%
0%	4%	0%
0%	0%	1%

$(G_M-G)^{-1}$=

6,67	0	0
0	25,00	0
0	0	100,0

1+G=

115%	0	0
0	121%	0
0	0	119%

LW=

			suma
0,15	0,28	0,30	0,73

LW(1+G)

0,173	0,339	0,357

$LW(1+G)(G_M-G)^{-1}$

1,15	8,47	35,70

$P=LW(1+G)(G_M-G)^{-1}X^{-1}=$

6,694	**-1,170**	**-1,080**

Un efecto más de la producción conjunta. Se puede ver en este ejemplo de la ecuación (II.19) cómo el precio del primer producto es muy alto (comparado con la masa de salarios ***LW***=**0.73**) como consecuencia de que el tercer producto, su tasa de ganancia (**19**%) está muy cerca de su tasa de ganancia máxima (**20**%). Es de notar cómo la pequeña diferencia entre una y otra del *tercer* producto afecta al crecimiento del precio del *primero*. También es de notar la existencia de precios negativos. Si el margen de ganancia entre ***G*** y $\boldsymbol{G}_M$ fuera más grande, los precios negativos desaparecerían, además de bajar.

Anexo E4: Generalización

Precios en producción conjunta y tasa máxima

$$P=LW(1+G)(G_m-G)^{-1}X^{-1}$$

W=

0,5		
	0,7	
		1

L=

			suma
0,3	0,4	0,3	1

G=

20,0%		
	16,0%	
		9,0%

G_M=

			G_m-G
30,0%			10,0%
	25,0%		9,0%
		20,0%	11,0%

X=

2	3	7
4	9	4
7	1	6

X^{-1} =

-0,166	0,037	0,169
-0,013	0,123	-0,066
0,196	-0,063	-0,020

G_M-G=

10%	0%	0%
0%	9%	0%
0%	0%	11%

$(G_M-G)^{-1}$=

10,00	0	0
0	11,11	0
0	0	9,1

1+G=

120%	0	0
0	116%	0
0	0	109%

LW=

			suma
0,15	0,28	0,30	0,73

LW(1+G)

0,180	0,325	0,327

$LW(1+G)(G_m-G)^{-1}$

1,80	3,61	2,97

$P=LW(1+G)(G_M-G)^{-1}X^{-1}$=

0,236	**0,322**	**0,006**

En este cuadro, con respecto al anexo E3, han cambiado las tasas de ganancia de cada mercancía (o sector), disminuyendo la primera (de **15**% al **10**%), aumentando la segunda (del **4**% al **9**%) y aumentando también la tercera (del **1**% al **11**%). Con ello, el precio de la primera mercancía ha caído notablemente (del **6**,**69** al **0**,**236**) y volviendo positivos los precios de las mercancías segunda y tercera). No obstante, como se puede comprobar, no guarda relación los aumentos o caídas porcentuales de las tasa de ganancia con las variaciones en los precios. Las razones ya la hemos explicado en el cuerpo principal del texto.

F - Capital fijo

Sraffa trata este tema desde el criterio de la producción conjunta porque le pareció -y con razón- que no había manera de abordarlo desde la óptica de la producción simple, es decir, del esquema de análisis según el cual existen múltiples factores o medios para producir una mercancía -bien o servicio-, pero sola una en cada proceso[63]. Con su capítulo sobre *el capital fijo* aborda el economista italiano la problemática de los medios de producción de duración superior a un año, aunque el período a contar es siempre convencional. Así, una máquina, las materias auxiliares, instalaciones, edificios, etc., son comprados o instalados en un momento determinado, pero su duración es o puede ser mayor que el año natural, a diferencia de otras materias primas y medios que son comprados y utilizados y/o desgastados en su totalidad en ese año y que el propio Sraffa llama *capital circulante*. Hay claramente, bajo este punto de vista, dos tipos de medios de producción según su duración en el proceso productivo. Según esto, ¿cuánto vale al final de un año una máquina que se ha comprado en ese año y que seguirá funcionando al año siguiente? El ejemplo sirve para cualquier medio de producción cuya vida se alarga más allá del período convencional de reproducción del sistema económico, entendido este como un proceso que trasciende la vida de las empresas y afecta al sistema en su conjunto. Oigamos a Sraffa cómo aborda el problema: "*Consideremos los instrumentos duraderos de producción como parte de la absorción anual de factores de producción de un proceso en pie de igualdad con los medios de producción (por ejemplo, materias primas) que son enteramente gastadas en el curso de un año; y lo que queda de ellas al final del año será tratado como una parte del producto anual conjunto de la industria cuya parte más importante consiste en la mercancía susceptible de venta, que es el objeto primordial del proceso*"[64]. Sraffa pone a continuación el ejemplo de una máquina de tejer que "*entra en los medios de producción al principio del año... y al final del año la máquina más vieja y parcialmente desgastada que emerge del proceso será considerada como un producto conjunto con el volumen de producción de calcetines del año*"[65]. Y a continuación resume el tratamiento de estos medios de duración plurianual: "*Este punto de vista implica que la misma máquina, a edades diferentes, debería ser tratada como otros tantos productos diferentes, cada uno con su precio*"[66]. Con esta capacidad de síntesis cualquier aclaración posterior sobra. Además, y afortunadamente en esta ocasión, hace explícito el sistema de ecuaciones que van a justificar su tratamiento, aunque siempre con su especial nomenclatura que yo modernizaré a los usos actuales. Veamos la ecuación que resume las ecuaciones de Sraffa[67] (f1):

$$p_{mj}M_j + p_jY_j = (1+r)\left[p_{m(j-1)}M_{j-1} + \sum_{i=1}^{i=n} p_iX_{ij}\right] + wl \quad desde \;\; j = 1 \;\; a \;\; n$$

[63] Si se quiere, por empresa, aunque creo conveniente en la obra capital de Sraffa referirse a procesos más que a empresas, obligados por sus dos grandes descubrimientos: *la mercancía-patrón* y *la razón-patrón.*

[64] Pág. 94 del capítulo X de *PMPM.*

[65] Pág. 93 de *PMPM.*

[66] Pág. 94 de *PMPM*.

[67] Pág. 96 de *PMPM*. Kurz y Salvadori relatan las dificultades de Sraffa y la ayuda del matemático y amigo Besicovitch en el artículo *Removing an insuperable obstacle in the way o fan objetivista análisis : Sraffa attempts as fixed capital*, 2008.

siendo $\boldsymbol{p}_{mj}$ el precio del bien $\boldsymbol{M}_j$ de *duración mayor de un año* que se obtiene conjuntamente con los bienes finales $\boldsymbol{Y}_j$; $\boldsymbol{M}_{j-1}$ sería el mismo bien que entró a principios de año (a los efectos, año anterior) como medio de producción en el año con su precio de compra $\boldsymbol{p}_{j-1}$. Como siempre, $\boldsymbol{r}$ sería la tasa de ganancia, $\boldsymbol{p}_j$ el precio de los bienes que son a la vez medios y bienes finales, $\boldsymbol{X}_{ij}$ los medios de producción, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salario y $\boldsymbol{l}$ el input de trabajo, que en este caso, es invariante a juicio de Sraffa, porque medimos el valor de unos medios dado "*el supuesto de eficiencia constante durante la vida de la máquina*"[68]. Aunque la ecuación (f1) la plantea Sraffa para la vida de una máquina[69], sin embargo el planteo del italiano puede generalizarse para $\boldsymbol{s}$ máquinas[70]. Sraffa, tras una serie de operaciones que llega a la ecuación que va a definir su sistema una vez introducido *el capital fijo*[71]:

(f2) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = w\,\underset{1xn}{L} + (1+r)\,\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \times \underset{1xs}{P_m}\,\underset{sxn}{M}$$

La (f2) sería una ecuación matricial generalizada a $\boldsymbol{s}$ máquinas o, en general, $\boldsymbol{s}$ *medios de vida plurianual*, con sus $\boldsymbol{s}$ precios $\boldsymbol{p}_s$. De esta forma, se gana en realismo sin perder potencial explicatorio al no tener que coincidir el número de medios plurianuales $\boldsymbol{s}$ con los de vida anual $\boldsymbol{n}$, es decir, con los gastados íntegramente en un año durante el proceso de producción. Estos bienes de duración plurianual sólo le exigimos la condición[72] de que $\boldsymbol{s}<\boldsymbol{n}$ por lo que luego se verá. Sraffa, a continuación, hace algunas consideraciones sobre las formas de amortización que, en mi opinión, carecen de interés en la época actual, aunque son correctas. Cabe pensar que en su tiempo, cuando concibió su obra y no cuando se publicó, la teoría de la amortización empresarial aún no se había desarrollado lo suficiente. Más tarde entra en terrenos más interesantes al considerar el capital fijo como un caso particular de productos conjuntos y de cómo sería un fracaso reducir estos bienes plurianuales a trabajo fechado[73]. De momento, nosotros vamos ir por otro camino más potente hasta llegar a *la frontera salario-ganancia*. Si hacemos -como es habitual en Sraffa- el salario $\boldsymbol{w}$ igual a cero nos queda la ecuación matricial:

(f3) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = (1+g_m)\,\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X} + \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \times \underset{1xs}{P_m}\,\underset{sxn}{M}$$

[68] Pág. 96 de *PMPM.*
[69] Un planteamiento que sigue al pie de la letra puede verse en Ahijado (*Distribución, precios de producción y crecimiento*, editorial Ceura, cap. III, 1982), que a su vez recoge los planteamientos de Roncaglia, 1978, y Schefold, 1971). Yo he seguido un camino propio porque este trabajo no pretende ser un resumen de otros.
[70] Ver anexo I.
[71] Aleccionador resulta comparar el planteamiento de Sraffa sobre el capital fijo y el que hace Garegnani sobre el mismo tema discutiendo la solución de Bortkiewicz (*El capital en la teoría de la producción*, cap. V, págs. 74-86, 1982 en Oikos-Tau).
[72] Sraffa no sólo era consciente de estos problemas, sino que los entendía también en sus aspectos matemáticos, aunque parezca huir de las explicaciones meramente formales. Eso sí, la ayuda del matemático y amigo Besicovitch fue crucial en ese punto y en todo el capítulo X del libro. Para los problemas de este epígrafe, véase la pág. 76 del capítulo VIII; también el apéndice C y la opción de eliminar en ambos lados de las ecuaciones del sistema los bienes no básicos para obtener la razón-patrón, es decir, para poder -diríamos nosotros- aplicar Perron-Froebenius y obtener precios positivos. Un tratamiento formal está en Roncaglia en *Sraffa and the Theory of Prices*, en el apéndice I sobre el Capital Fijo.
[73] Pág. 98 de *PMPM.*

donde $\boldsymbol{g}_m$ sería la tasa máxima de ganancia. El quebrado que multiplica a precios y cantidades de los productos plurianuales es la fórmula de anualización de un capital que aparecen en los libros de matemáticas financieras o, como dice Sraffa, *de comercio*. De las ecuaciones (f2) y (f3) obtenemos los precios de las mercancías que *no* son plurianuales:

(f4) $$P = \frac{w}{g_m - r} \times LX^{-1}$$

donde lo notable de (f4) es que los precios de los bienes *no* plurianuales $\boldsymbol{P}$ no dependen de los plurianuales, es decir, de $\boldsymbol{P}_m$. Si en (f3) despejamos los precios $\boldsymbol{P}_m$, queda la ecuación:

(f5) $$P_m = \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \times P\left[Y - (1+g_m)X\right] \times M^T\left[MM^T\right]^{-1}$$

En (f5) se comprueba que los precios de los productos plurianuales, $\boldsymbol{P}_m$, dependen de los precios de los no plurianuales, pero no al revés. En este sentido es por lo que se puede asimilar a los primeros como mercancías no básicas, aunque sí que entran como medio de producción y perduran más de un año. El tema tiene interés y se ve la primacía del concepto sobre su caracterización formal; formalmente (matemáticamente), la cancelación que lleva a cabo Sraffa en los dos lados de la ecuación de definición del sistema hace que los bienes plurianuales no cumplan lo característico de los bienes básicos, porque entran como medios pero no como productos finales. Sabemos las dificultades, ayudas y ensayos que culminaron en la redacción de este capítulo y su aspecto final. De ahí también -entre otras razones- el esfuerzo enorme que hace Sraffa en su libro por explicar los aspectos económicos de su modelo y lo renuente que se mostraba en hacer explícitos los aspectos formales. Un punto y aparte más adelante incidimos en el tema.

En (f5) de nuevo vemos ahora porqué se hizo $\boldsymbol{s}<\boldsymbol{n}$, es decir, que los elementos plurianuales fueran menores que los anuales. El rango de la matriz $\boldsymbol{M}$ vale $\boldsymbol{s}$ y también el de $\boldsymbol{MM}^T$, con lo cual es esta última invertible sin problemas, salvo los habituales de colinealidad de una fila o columna con otras filas o columnas, lo cual, en el mundo real, es un suceso imposible. Sraffa no impone esta condición ni la hace explícita, pero sí la hizo en el caso de la producción conjunta, con lo cual cabe suponer[74] que era consciente de todo ello.

De las ecuaciones (f4) y (f5) se obtiene:

(f6) $$\boxed{P_m = \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \times \frac{w}{g_m - r} \times L\left[X^{-1}Y - (1+g_m)\right] M^T\left[MM^T\right]^{-1}}$$

Ahora los precios de los productos plurianuales $\boldsymbol{P}_m$ dependen de todas las variables: $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{g}_m$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{M}_j$. También se puede comprobar que, aunque el tipo de interés $\boldsymbol{r}$ permanezca por debajo de la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$, la existencia de

[74] Mi opinión es que era plenamente consciente porque en otro apartado habla de eliminar ecuaciones con el fin de eliminar los productos no básicos. Eso supone entender matemáticamente el concepto de rango de una matriz.

las inversas en (f6) posibilita que algunos de los precios de los productos plurianuales $\boldsymbol{P}_m$ puedan ser negativos, al igual que ocurría con la producción conjunta. ¿Cuál es la interpretación económica de todo esto? Oigamos a Sraffa: "*Los instrumentos duraderos* -los que hemos llamado plurianuales-*, si son básicos, habrán de estar representados en la mercancía-patrón por muestras de las diferentes edades en sus debidas proporcion*es"[75]. En efecto, si los bienes plurianuales son básicos, entrarán en pie de igualdad con el resto de los bienes básicos, y si cumple la condición de productividad, es decir, que el total de la producción de ese bien sea mayor que el total de los medios de ese mismo bien, entonces su precio cumplirá una de las condiciones necesarias para que sea positivo[76]. La otra dificultad para conseguir unos precios positivos se deriva de aplicar un mismo tipo de interés, tanto para el cálculo de la amortización -el primer término del lado derecho de la igualdad de (f6)- como para la tasa de ganancia general. Ello obliga a amortizaciones aceleradas si la tasa de ganancia exigida es muy alta, lo cual provoca que los bienes de producción de un período que son medios en el siguiente -como es el caso de los bienes plurianuales, los ***M***- entren a un precio elevado en el resto de los sectores o en el de origen, y con ello a elevar los costes de otros sectores hasta, en algún caso, hacer mayores estos que los ingresos, con el resultado de precios negativos. Es una limitación del modelo que puede ser salvado con dos tipos de interés: uno para las amortizaciones de los bienes plurianuales y otro para la tasa de ganancia general exigida por el modelo. Sraffa no diferenció ambas tasas, pero era consciente del problema cuando, hablando del precio de la maquinaria que envejece, dice: "*El precio... no puede explicarse desde el lado del coste de la producción. Resulta exclusivamente de la necesidad de mantener, cuando el tipo de beneficio varía, la igualdad de precio de todas las unidades del producto, cualesquiera que sean las diferencias en edad de los instrumentos mediante los cuales son respectivamente producidos*"[77]. Pero utilizar el mismo tipo para el reparto del excedente que para el cálculo de la obsolescencia parece inaceptable. Ambas cosas son tan dispares que, representan problemas diferentes en el modelo e, incluso, los actores que influyen en las decisiones no coinciden exactamente. La solución, en este caso, es obvia y no representa mayor problema: diferenciar mediante dos variables diferentes el tipo de la anualización del tipo de la tasa de ganancia.

G - Tierra

Abordamos ahora el capítulo XI de la obra de Sraffa que va referido al viejo tema de la renta de la Tierra. Esta renta, como una de las tres retribuciones de la producción junto con los salarios (de los trabajadores) y las ganancias (de los capitalistas), la rastrea Schumpeter hasta llegar a Quesnay y a Cantillon[78]. Siempre ha tenido mala prensa, incluso entre los economistas que hoy -pero no en su momento- pueden ser considerados ortodoxos. A. Smith la critica y para D. Ricardo es una de las ideas-fuerza de su esquema intelectual. Ricardo la define como: *"... aquella parte del producto de la tierra que se paga al terrateniente por el uso de energías originarias e*

[75] Pág. 104 de *PMPM.*

[76] Las otras condiciones son que la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ sea irreductible, no negativa, y que el tipo de ganancia sea inferior a la razón-patrón si estamos en la producción simple. Fuera de la producción simple -es decir, sin Perron-Froebenius- nada garantiza a ningún bien que su precio sea positivo: sólo la sociología empresarial a la que recurre Sraffa.

[77] Pág. 104 de *PMPM.*

[78] *Historia del Análisis Económico*, págs. 266 y siguientes, ediciones Ariel.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

indestructibles del suelo"[79]. Tiene esta definición cierto empaque, como de una pretensión de universalidad, como corresponde a un intelectual de máximo nivel que era el economista inglés. Tampoco con ello se limita a las rentas derivadas de los productos agrícolas, sino que también se refiere a las de las minas. Sin embargo, unos cuantos párrafos más allá, la completa, la concreta y muestra de paso su rechazo a esta retribución cuando dice que: "*Únicamente porque la tierra no es ilimitada en cantidad ni uniforme en calidad, y porque con el incremento de la población, la tierra de calidad inferior o menos ventajosamente situada tiene que ponerse en cultivo, se paga renta por su uso*"[80]. En esta frase queda claro para el que lo lea sin prejuicios, que la renta, en concreto, la de la tierra se deriva de un problema de calidades o, su equivalente económicamente, de distancias. Pero es el propio Ricardo el que origina confusión cuando más tarde dice que: "*Renta es siempre la diferencia existente entre el producto obtenido mediante el empleo de dos cantidades iguales de capital y de trabajo*"[81]. Aquí parece indicar Ricardo que, aún cuando no hubiera diferentes calidades de tierra, el sólo hecho de aumentar el capital y/o el trabajo sobre la tierra origina una renta. De aquí a la ley de los rendimientos decrecientes generalizada para todos los recursos productivos y de las productividades marginales no hay más que un paso. O quizá más de uno, porque esta formulación explícita y generalizada se hace con los marginalistas en el último tercio del XIX. Para los marginalistas y neoclásicos de antes y de nuestros días, todos los factores[82] se pagan -¿o querían decir que *deberían* pagarse?- de acuerdo con el valor de sus *productividades marginales*. Y ahí acabó el intento de construir un tipo de conocimiento con marchamo de ciencia, para convertirse en meros gráficos y fórmulas hasta que llegó una rama de este conocimiento -que no ciencia- que fue el keynesianismo[83]. Pero volvamos con Sraffa y su capítulo XI y oigamos sus palabras sobre qué entiende él por renta: "*Puede decirse que los recursos naturales que son utilizados en la producción, tales como la renta y los depósitos minerales, y que por ser su oferta escasa permiten a sus poseedores la obtención de una renta, ocupan entre los medios de producción una posición equivalente a la de los productos "no básicos" entre los productos*"[84]. Puede verse por estas palabras que Sraffa no se queda en la concepción de Ricardo sobre el origen de la renta y, sin desdecir al economista inglés que tanto admiraba y al que dedicó buena parte de su vida a su obra y a su correspondencia, pone el acento el italiano -y quizá toda la partitura- en *la escasez* como origen de la renta. Es verdad que ya en su época era un lugar común hablar de la escasez como una de las características de los llamados fenómenos económicos y, quizá por ello, se hablaba de la economía como *la ciencia lúgubre*. Más tarde aclara Sraffa el porqué de ese acento: "*Si no hubiera escasez, sólo se utilizaría un método, el más barato sobre la tierra, y no podría existir renta*"[85]. Aquí ya se aleja de Ricardo -en mi opinión- porque habla de *método*, es decir, de lo que hoy llamaríamos métodos de producción, que ya coge al marginalismo a contrapié, porque nos alejamos de aumentos de la intensidad del capital para hablar de cambios en su composición. Sraffa no da puntadas sin hilo y, poco a poco, sin querer traicionar a sus maestros clásicos, va llevando el agua a su molino hasta dejar seco el molino de los marginalistas.

---

[79] *Principios de Economía Política y Tributación*, pág. 51. FCE.
[80] Pág. 53 ob. citada de Ricardo.
[81] Pág. 54 ob. citada de Ricardo.
[82] El lenguaje se hace más aséptico y ya no se habla de trabajo, capital o tierra, sino de factores, todos en pie de igualdad.
[83] Otra injusticia histórica, porque cuando se habla de Keynes o keynesianismo, habría que mencionar ineludiblemente Kalecki.
[84] Pág. 108 de *PMPM.*
[85] Pág. 110 de *PMPM.*

Sin más preámbulos, vamos a exponer las ecuaciones, que esta vez ¡también! las hace explícitas Sraffa y que recojo en forma matricial:

(g1) $$\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = \underset{1xn}{P_t}\underset{nxn}{T} + w\underset{1xn}{L} + (1+r)\underset{1xm}{P}\underset{mxn}{X}$$

donde la novedad respecto a las ecuaciones que definen el sistema *esrafiano* es la de la inclusión de $\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{T}$, siendo $\boldsymbol{P}_t$ la renta (unitaria) de la tierra (o minas, por ejemplo) y ***T*** una matriz diagonal ***n***x***n*** que representa las cantidades de las diferentes tierras según sus cualidades. La otra posible novedad es la de que los precios de los medios de producción se llevan desde **1** a ***m***, en lugar de ***n***. Yo no entiendo porqué. De momento haré ***m***=***n*** y en un anexo daré la ecuación y sus posibles consecuencias para el caso de que ***m*** fuera diferente a ***n***. De (g1), al hacer cero la tasa de salarios ***w***, obtenemos:

(g2) $$\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = \underset{1xn}{P_t}\underset{nxn}{T} + (1+g_m)\underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X}$$

siendo $\boldsymbol{g}_m$ la tasa máxima de ganancia. Ahora, de (g1) y (g2) sale:

(g3) $$P = \frac{w}{g_m - r} \times L X^{-1}$$

donde los precios de los productos y de los medios -es decir, las *no rentas*- no dependen de las rentas $\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{T}$. La (g3) es muy acorde con lo que decía D. Ricardo: "*Dicho cereal no se encarece porque hay que pagar una renta, sino que debe pagarse una renta porque el cereal es caro*"[86]. Los precios de los productos finales ***P***, sean genéricos o sea el trigo como bien final, no dependen de $\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{T}$, es decir, de las rentas. Ya queda dicho que el economista inglés, sin título universitario, era una inteligencia suprema. De (g2) y (g3), sustituyendo los precios de (g3) en el lado derecho de (g2) pero no en el lado izquierdo, queda:

(g4) $$\boxed{P_t = PYT^{-1} - \frac{w(1+g_m)}{g_m - r} \times LT^{-1}}$$

Ahora las rentas unitarias $\boldsymbol{P}_t$ aumentan con el aumento de los precios finales ***P***, con la productividad de la tierra $\boldsymbol{YT}^{-1}$, con la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$; disminuyen, en cambio, con los salarios ***w***, con la tasa de ganancia (interés, beneficios) ***r*** y con la saturación de la mano de obra en relación a la tierra $\boldsymbol{LT}^{-1}$. De nuevo aquí las rentas (unitarias) de la tierra $\boldsymbol{P}_t$ dependen de los precios del producto ***P***, pero no al revés. Creo que D. Ricardo, de la mano de Sraffa, estaría satisfecho. También Pasinetti[87] con su pequeño modelo ricardiano y su ecuación diferencial:

---

[86] Pág. 56 de ob. citada.

[87] *Crecimiento económico y distribución de la renta*, 1983, pág. 21, Alianza Editorial [*Growth and Income Distribution - Essays in Economic Theory*, 1974.]

(g5) $$R = f(N) - N\frac{df}{dN}$$

siendo ***R*** la renta de la tierra buscada, f(***N***) la función de producción (del trigo o bien final), ***N*** el número de trabajadores (u horas de trabajo) y d**f**/d***N*** la productividad (marginal) del trabajo.

<u>Generalización I.</u>

Una generalización del modelo *esrafiano* que Sraffa no se atrevió a formular podría venir dado por la ecuación:

(g6) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = \underset{1xn}{P_t}\underset{nxn}{T} + (1+r)\times(w\underset{1xn}{L} + \underset{1xs}{P_x}\underset{sxn}{X})$$

donde hay ***m***+***n***+***s*** precios diferentes entre productos finales $\boldsymbol{P}_y$, rentas unitarias $\boldsymbol{P}_t$ y precios de los medios $\boldsymbol{P}_x$, y con el tipo de ganancia ***r*** abarcando todos los costes. Al seguir los mismos pasos dados para deducir (g4), obtenemos la ecuación:

(g7) $$\boxed{P_t = P_y Y T^{-1} - \frac{w(1+r)(1+g_m - r)}{g_m - r}\times L X^T\left[X X^T\right]^{-1} X T^{-1}}$$

que no cambia nada las conclusiones de la ecuación (g4)[88]. Y, al igual que en la anterior, nada nos asegura desde el punto de vista formal la existencia de rentas negativas, lo cual no tendría sentido económico. Sólo podría evitarse al modo *esrafiano* acudiendo a la realidad y con los propietarios o empresarios huyendo de posibles métodos de producción -que dependen de ***L*** y ***X***- en la agricultura que dieran lugar a semejante desaguisado.

La principal dificultad de los modelos planteados, tanto del *esrafiano* más puro -el mencionado de Pasinetti- como el ampliado, es la de que las matemáticas tienen enorme dificultad para distinguir la calidad de la cantidad. Hemos visto que de Ricardo arranca dos posibles interpretaciones de la renta (diferencial) de la tierra: la debida a los cambios de calidad y la del aumento de la cantidad de medios empleados para una misma cantidad de tierra manteniendo la misma calidad, es decir, con cantidades homogéneas susceptibles de suma. A posteriori, ambas interpretaciones caben formalmente, pero las consecuencias reales son distintas por más que las matemáticas no puedan distinguirlas. Sraffa se percató de ello con su proverbial sentido de la observación y lo explicó mejor en el epígrafe 89 de su libro, uno de los más brillantes del italiano. En el siguiente plantea el sempiterno problema de los medios de producción que no son producidos (la tierra, las minas) y de la posibilidad -como es el caso del trigo- de varios métodos de producción para obtener el mismo bien final. En concreto dice Sraffa que: "*Las máquinas de tipo obsoleto son similares a la tierra en la medida en que son empleadas como medios de producción aunque ya no son producidas... Y como la tierra, tales instrumentos obsoletos tienen*

[88] Al no ser ahora ***X*** cuadrada se ha tenido que recurrir al cálculo de $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}[\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}]^{-1}$ para despejar las rentas unitarias; y para no tener problemas con la inversa se ha puesto una limitación en el modelo: que ***s***<***n***, es decir, que el número de medios de producción sea menor que el número de procesos.

la propiedad de los productos no básicos y son excluidos de la composición de la mercancía patrón"[89].

Generalización II

El caso más amplio al que se alude en el cuerpo principal de este texto sería el definido por la ecuación:

(g8) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = \underset{1xs}{P_t}\underset{sxn}{T} + (\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_x}\underset{nxn}{X})(1+\underset{nxn}{F})$$

donde los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$, las rentas unitarias $\boldsymbol{P}_t$ y los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}_x$ son independientes entre sí y con diferente número de bienes o rentas; donde hay ***s***x***n*** tipos diferentes de tierras, y donde ahora las tasas de salarios ***W*** y de ganancias ***F*** son matrices diagonales con ***n*** términos, es decir, tantos como procesos. En total hay ***n*** ecuaciones para ***m***+***s***+***n*** precios, más ***n*** tipos de salario y ***n*** tasas de ganancia: total de variables: ***m***+***s***+***3n***. Es decir, ***m***+***s***+***2n*** grados de libertad. Hemos supuesto que los productos finales ***Y***, las tierras ***T*** y los medios de producción ***X*** son datos, aunque muy bien podría considerarse, bajo otros criterios, variables también. Si ahora hacemos, como es habitual, igual a cero los salarios ***W***, tenemos la ecuación siguiente con la máxima tasa de ganancia $\boldsymbol{F}_m$ para cada proceso:

(g9) $$\underset{1xm}{P_y}\underset{mxn}{Y} = \underset{1xs}{P_t}\underset{sxn}{T} + \underset{1xn}{P_x}\underset{nxn}{X}(1+\underset{nxn}{F_m})$$

Entre las dos ecuaciones anteriores, eliminando términos comunes y despejando los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}_x$, obtenemos:

(g10) $$P_x = LW(1+F)(F_m-F)^{-1}X^{-1}$$

y sustituyendo $\boldsymbol{P}_x$ de la última ecuación en la anterior queda:

(g11) $$\boxed{P_t = \left[P_y Y - LW(1+F)(F_m-F)^{-1}(1+F_m)\right]T^T\left[TT^T\right]^{-1}}$$

Expresión donde se explican ***s*** rentas unitarias $\boldsymbol{p}_t$; expresión que no deja de ser explicativa, pero que se acerca cada vez más a lo empírico, es decir, a la contrastación de hipótesis. Aunque no lo parezca, (g11) es la renta ricardiana (unitaria) de la tierra, pero pasada por el tamiz discontinuo del modelo *esrafiano.* O, al menos, se deduce de él. En términos aritméticos, (g11) sería:

(g12) $$\boxed{p_k = \left[\sum_{h=1}^{m} p_{yh}\sum_{j=1}^{n} y_{hj} - \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}(1+f_{ij})\times(1+f_{mij})}{f_{mij}-f_{ij}}\right]\times \hat{t}_{jk}}$$

[89] Pág. 112 de *PMPM*.

H - Desplazamientos de los métodos de producción

Este capítulo de Sraffa nos remite por fuerza a la polémica de la teoría del capital[90] que abrió Joan Robinson en 1953[91] preguntándose aquello de en *qué* unidades se mide el capital. Ello además nos obliga a a la segunda pregunta de *cómo* se agrega, si se quiere partir –como se hace desde el modelo neoclásico- de una función de producción. Nada más publicarse el libro de Sraffa, surge el artículo de Samuelson de 1962[92] y viene después una riada de réplicas y contrarréplicas de Robinson, Pasinetti, Garegnani, Meade, Kaldor, Modigliani, Nuti, etc., unos defendiendo la teoría y la función de producción neoclásica y otros criticándolas. En la polémica no se utiliza a Sraffa como centro del debate, aunque a veces se le trae a colación[93]. Sraffa, por su parte, permanece impasible. Y sin embargo la obra de Sraffa y este capítulo están en el fondo de la polémica. Veamos de su importancia. Dice Sraffa que "*se conocen dos métodos alternativos para la producción de una de las mercancías. Y para comenzar por el caso más sencillo, supongamos que la mercancía en cuestión es un producto* <u>*no*</u> *básico*"[94]. No me extiendo más en el problema ni en sus historia porque hay otro artículo en este mismo monográfico que trata de la cuestión, y en cuenta a lo que es el caso más sencillo que califica Sraffa es discutible. Una ecuación que pudiera representar el caso que habla Sraffa vendría dado por:

(h1) $$\underset{1x1}{p_a}\,\underset{1xn}{Y_a} + \underset{1xn}{P_b}\,\underset{nxn}{Y_b} = \underset{1x1}{(1+g)}\left[\underset{1x1}{w}\,\underset{1xn}{L} + \underset{1xn}{P_b}\,\underset{nxn}{X}\right]$$

donde $\boldsymbol{p}_a$ es el precio del (único) producto final no básico y $\boldsymbol{P}_b$ es el vector de precios de los productos básicos, $\boldsymbol{Y}_a$ es un vector de productos finales no básicos, donde todos sus elementos son cero menos el que corresponde al precio $\boldsymbol{p}_a$, $\boldsymbol{Y}_b$ una matriz de productos finales básicos, $\boldsymbol{g}$ es la tasa de ganancia, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salario, $\boldsymbol{X}$ la matriz de medios de producción. El bien *no* básico $\boldsymbol{y}_a$ es cualitativamente el mismo, pero es producido desde $\boldsymbol{n}$ métodos de producción diferentes ($\boldsymbol{n}$ columnas). Es decir, las columnas de $\boldsymbol{X}$ no son en esta ocasión sectores de la economía, sino posibles *métodos de producción alternativos* para producir el bien no básico y los bienes básicos. Es pues una generalización del problema planteado por Sraffa que habla de "*una mercancía*" desde dos métodos diferentes. De momento la ecuación es única, por lo que corresponde a un método de producción. Cuando hablemos de más de un método, introduciremos tantos sistemas de ecuaciones matriciales como métodos, porque ello supone que al menos $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{X}$ van ser diferentes. Si en la ecuación (h1) hacemos que lo salarios $\boldsymbol{w}$ valgan cero para obtener la tasa máxima de ganancia, es decir, hacemos el supuesto de que todo el excedente se lo lleva las ganancias, entonces la ecuación queda:

(h2) $$p_a Y_a + P_b Y_b = (1+g_m) P_b X$$

---

[90] Harcourt recogió toda la polémica en su libro *Some Cambridge controversies in the Theory of Capital*, 1975.
[91] *The Production Function and The Theory of Capital*.
[92] *Parable and Realism in Capital Theory. The surrogate Production Function.*
[93] Samuelson en el artículo le menciona al final del artículo en las *Notas breves diciendo que* "Sraffa da de ella (la frontera salarios-ganancia) cierta versión en su libro de 1960, basándose en investigaciones de 35 años antes".
[94] Pág. 115 de *PMPM*).

donde $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$ es la tasa máxima de ganancia. De entre ambas ecuaciones obtenemos, como es habitual, los precios de los productos básicos:

(h3) $$P_b = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times LX^{-1}$$

Con estas tres ecuaciones y con los dos numerarios definidos como:

(h4) $$\underset{1xn}{L}\,\underset{nx1}{I} = 1$$

(h5) $$\underset{1xn}{Y_a}\,\underset{nx1}{I} = 1$$

donde **I** es el vector de unos de dimensión ***n*x1**, ya podemos obtener la ecuación intermedia:

(h6) $$P_a Y_a = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times (1 + g_m - LX^{-1}Y_b)$$

Para mayor comodidad, vamos a llamar ***f*** a $\boldsymbol{LX^{-1}Y_b I}$. Además vamos a post-multiplicar (h6) por el vector de unos **I** de dimensión ***n*x1**. Entonces (h6) se convierte en:

(h7) $$\boxed{P_a = \frac{w(1+g)\left[1 + g_m - f\right]}{(g_m - g)}}$$

es decir, la relación *precio de producto no básico-tasa de ganancia*. Esta función es crecientemente creciente porque son positivas las derivadas primera y segunda. También puede comprobarlo el lector a simple vista, puesto que el numerador aumento con aumentos de la tasa de ganancia ***g*** y, sobre todo, disminuye el denominador (por lo que aumenta el quebrado) a medida que ***g*** se acerca a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$. Es decir, la función es siempre monótona creciente sin cambio de convexidad, por lo que no se corresponde con los gráficos mencionados de Sraffa y Pasinetti[95]. Sraffa no hace explícita la ecuación que justifica su gráfico -cosa habitual-, pero Pasinetti sí lo hace[96] con:

(h8) $$P_q = PA_q(1+r) + l_q w$$

donde $\boldsymbol{p}_{\mathrm{q}}$ es el precio de la mercancía no básica, ***P*** el vector de precios del resto -que son bienes básicos-, ***r*** el tipo de ganancia, $\boldsymbol{l}_{\mathrm{q}}$ el input de trabajo de la mercancía no básica y ***w*** la tasa general de salarios[97]. La ecuación (h7) es creciente respecto al tipo

[95] *Lezioni di teoria delle produzione*, 1975 [*Lecciones de la teoría de la producción*, 1983, pág. 197, edit. FCE].
[96] Pág. 199 libro anterior.
[97] Para nada afecta a la discusión que la tasa de ganancia comprenda todos los costes -incluidos los salariales- como que excluya a estos últimos. Difiere la forma de la ecuación de precios y la de la frontera salario-ganancia, pero lo esencial permanece. Pasinetti sigue la ecuación que supuestamente sigue Sraffa y que es la habitual en el economista italiano para la producción simple.

de interés cuando están dadas el resto de las variables. Al igual que ocurre con esta, los precios de las mercancías no básicas (en la (h8), $\boldsymbol{p}_q$) pueden bajar si, por ejemplo, un cambio en la técnica, hace cambiar $\boldsymbol{A}_q$ y $\boldsymbol{l}$, es decir, los medios y el trabajo. Pero entonces debemos hablar de un *desplazamiento* de la curvas (h7) y (h8) y *no de un deslizamiento* a lo largo de la curva *precio-tasa de ganancia*, que es lo que dibujan los gráficos mencionados. Quizá en la época que concibió Sraffa su obra esa diferenciación entre deslizamientos y desplazamientos no estaba bien asentada[98], pero en la época que escribe Pasinetti ya no había dudas. Lo curioso es que esto no tiene consecuencias serias para la frontera salario-ganancia, ni para el problema y el debate sobre la elección de técnicas y el retorno de las mismas.

Dos cosas curiosas: 1) De la comparación entre las ecuaciones (h3) y (h7) se deriva la pregunta de cuál de los precios crecen más deprisa, si los de los bienes básicos o los de los no básicos. Si dividimos ambas ecuaciones y tras alguna manipulación algebraica elemental, se obtiene la conclusión que los bienes no básicos tendrán un crecimiento mayor que el de los básicos si $\boldsymbol{g}_m > \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}_b\mathbf{I}-\boldsymbol{n}$; sería menor si la inecuación anterior tuviera signo contrario; 2) La segunda afecta sólo a la ecuación (h7). De esta se deriva que para que los precios de los productos no básicos $\boldsymbol{P}_a$ no sean negativos –lo cual no tiene en principio sentido económico-, la tasa de ganancia máxima ha de estar comprendida entre: $\mathbf{0} < \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}_b\mathbf{I} < \boldsymbol{g}_m$. Si al elegir una técnica, es decir, una combinación de medios de producción $\boldsymbol{X}$ e inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$ que diera lugar a los productos finales $\boldsymbol{Y}_b$ y $\boldsymbol{Y}_a$ tal que no se cumpliera la doble inecuación anterior, entonces Sraffa nos da la solución a lo largo del libro de que serán los propios empresarios o gestores los que abandonarán ese método de producción. Este recurso de Sraffa a los comportamientos de sentido común de los gestores ante los posibles escapismos absurdos –pero posibles- derivados de su modelo es de las cosas más atractivas del modelo y significativas de su forma de pensar. Sraffa, con ello, antepone el comportamiento económico al desarrollo formal, la economía a las matemáticas. Y lo hace, y esto es esencial, sin caer en ninguna incoherencia y sin traicionar su propio modelo.

El desplazamiento de métodos para productos no básicos

El desplazamiento de los métodos de producción o de *elección de técnicas* podemos abordarlo desde la función (h7) *precios de productos no básicos-tasa de ganancia* o desde la ecuación *frontera salario-ganancia*. El resultado es el mismo. Desde la función precio-ganancia se plantea el problema de dos técnicas representadas por dos funciones tipo (h7), pero con diferentes tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{g}_m$ y con diferentes funciones técnicas $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}_b$, lo que dará lugar a diferentes precios de las mercancías no básicas. El punto de corte será aquel en el que se igualen los precios. Veamos estos con las ecuaciones:

(h9) $$p_{a1} = \frac{w(1+g)\left[1+g_{m1}-f_1\right]}{(g_{m1}-g)}$$

(h10) $$p_{a2} = \frac{w(1+g)\left[1+g_{m2}-f_2\right]}{(g_{m2}-g)}$$

[98] Pero en Marshall ya no hay dudas.

Al igualar $\boldsymbol{p}_{a1}$ con $\boldsymbol{p}_{a2}$ y resolver (h9) y (h10) se obtiene la tasa de ganancia:

(h11) $$\boxed{g = \frac{g_{m2}[1-f_1]-g_{m1}[1-f_2]}{(g_{m1}-f_1)-(g_{m2}-f_2)}}$$

La ecuación (h11) nos daría el punto de corte propicio para el cambio de técnicas, donde, al mismo precio, hay dos sendas que puede seguir el empresario o gestor para maximizar su ganancia; y de haber ***n*** técnicas diferentes podría haber hasta ***n-1*** cambios posibles. Esta es una de las grandes novedades y conclusiones del análisis *esrafiano*, por contraposición al análisis marginalista de maximización de funciones. Con Sraffa, el gestor puede maximizar su ganancia, pero cambiando de técnica, porque las variables monetarias -precios, salarios y ganancias- se determinan *simultáneamente* y no como consecuencia de funciones de producción inanes a los precios ni derivadas de procesos de optimización. Este sólo hecho, esta sola ventaja, por sus dosis de realismo y a pesar del nivel de abstracción en el que aún nos movemos, bastaría para arrinconar los modelos marginalistas de maximización de funciones (al maximizar ganancias). En Sraffa, como se ve, también se apela a comportamientos de optimización, pero con otros supuestos. De (h11) ha se obtienen que para que los puntos de cortes se den con tasas de ganancia positiva ha de cumplirse que:

(h12) $$\frac{g_{m2}}{g_{m1}} > \frac{(1-f_2)}{(1-f_1)}$$

(h13) $$g_{m1}-f_1 > (g_{m2}-f_2)$$

y con signo contrario el otro posible. En términos gráficos diríamos que la relación creciente de los precios en función de las tasas de ganancia en (h9) y (h10) es posible si, al arrancar las dos funciones en el eje de ordenadas para la tasa de ganancia ***g***=**0**, ocurra que la que comienza por debajo tenga una tasa de crecimiento mayor que la que está por encima. En este caso –que es uno de los 3 posibles- el gestor comenzará con un método de producción (técnica) porque su tasa de ganancia supere al posible método alternativo, y continuará hasta un posible punto de corte, es decir, hasta que un posible cambio (truncamiento) organizativo y/o tecnológico le permita seguir con los mismos precios, pero a tasas más altas de ganancia. Hecho esto, puede ocurrir (o no) que de nuevo se le presente la ocasión de un nuevo punto de corte de los dos posibles métodos, de tal manera que un nuevo cambio le permite volver al método anterior. Este hecho posible es un argumento obtenido a partir de Sraffa que hecha por tierra la función de producción neoclásica, donde el retorno de las técnicas están prohibidas por problemas de consistencia interna del modelo. La razón de ello es que según el modelo marginalista de equilibrio general, las funciones de producción tienen que mantener una relación monótona decreciente entre ganancias y la relación capital/producto, y para ello son necesarias funciones convexas incompatibles con el retorno de las técnicas y, por ejemplo, con el modelo de Sraffa[99].

[99] Garegnani lo utiliza para rebatir a Samuelson-1961 en su artículo Heterogeneous Capital.

Desplazamientos de técnicas para productos básicos.

En contra de lo que afirma Sraffa, este caso es, al menos formalmente, más sencillo porque nos hemos desprendido de los bienes *no* básicos y las ecuaciones que van a definir el tema se simplifican. La ecuación que define el sistema será muy *esrafiana*:

(h14) $$\underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{Y} = (1+r)\times\left[w\ \underset{1xn}{L} + \underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{X}\right]$$

donde todos los bienes son básicos y donde la matriz de productos finales ***Y*** puede ser diagonal (producción simple) o no diagonal (producción conjunta *esrafiana*), es decir, sólo con ceros para ***i*** distinto de ***j*** (simple) o con todos sus elementos no negativos (conjunta). La ecuación ahora que surge de dar valor cero a la tasa de salarios ***w*** es:

(h15) $$PY = (1+R)PX$$

donde ahora le hemos llamado a la tasa de ganancia máxima ***R***, que si estamos en producción simple será también *la razón-patrón de Sraffa*, y si estamos en producción conjunta será sólo *la tasa máxima de ganancia*. De (h15) y (h16) obtenemos, de forma análoga a como hacíamos antes con los productos *no* básicos, la ecuación:

(h16) $$P = \frac{w(1+r)}{R-r}\times LX^{-1}$$

que nos da la relación entre precios ***P*** y tasa de ganancia ***r***. Más claro que antes queda que esta función es creciente; más aún, es crecientemente creciente y se hace infinita si la tasa de ganancia ***r*** aplicada por los empresarios a sus negocios se acercara a la tasa máxima ***R***.

Ahora vamos hacer lo siguiente: 1) vamos a multiplicar a (h16) por **YI**, es decir, por la matriz de productos finales y por el vector de unos de dimensión ***n*x1**; 2) vamos a tomar como numerario ***P*YI**, es decir, ***P*YI**=**1**; 3) y vamos a llamar por comodidad ***f*** o función técnica a $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{LX}^{-1}\mathbf{YI}$. Hechas estas 3 cosas en (h16) y despejando la tasa de salarios ***w***, queda la ecuación que va a definir *la frontera salario-ganancia* de este epígrafe:

(h17) $$\boxed{w = \frac{R-r}{(1+r)\,f}}$$

Esta es una función crecientemente decreciente (con primera derivada negativa de ***w*** respecto a ***r***, y segunda positiva). Es decir, es una función convexa con puntos de corte ***w***(***r***=**0**)=***R***/***f*** y ***r***(***w***=**0**)=***R***. Para cambiar, vamos ahora a partir de la frontera salario-ganancia definida en (h17) en lugar de hacerlo con la relación precios-tasa de ganancia que hemos hecho en el epígrafe anterior. Los resultados son exactamente los mismos, pero en este caso las maniobras algebraicas son más sencillas. Dos técnicas diferentes se notarán en (h17) porque la tasa máxima de ganancia ***R*** y la función técnica ***f*** serán diferentes. Ello dará lugar, en general, a tasas de salario ***w*** diferentes para una misma tasa de ganancia ***g***. Los puntos de corte, por tanto, al igual que ocurría en el caso de los productos no básicos, se darán cuando se igualen las tasas de salario. Veamos las dos ecuaciones:

(h18) $$w_1 = \frac{R_1 - r}{(1+r)\, f_1}$$

(h19) $$w_2 = \frac{R_2 - r}{(1+r)\, f_2}$$

El resultado de igualar (h18) y (h19) y despejar la tasa de ganancia ***r*** es:

(h20) $$\boxed{r = \frac{R_2\, f_1 - R_1\, f_2}{f_1 - f_2}}$$

Con 2 técnicas podrá haber como máximo 2 puntos de corte[100], pero también puede haber uno o ninguno. Con varias técnicas las cosas se complican extraordinariamente. El empresario o gestor tendrá la oportunidad de conducirse por una senda (un proceso técnico) hasta que encuentre otro que, para la misma tasa de salarios, obtenga una mayor tasa de ganancia. En el punto de cruce será crucial su decisión, porque será el único momento (si las funciones se cortan un vez) que ambos procesos productivos le serán indiferentes si sólo valora los salarios y las ganancias, porque en ese momento serán iguales para ambos. En ese momento, si no se equivoca, tendrá la posibilidad de elegir un proceso que le reportará más ganancias con los mismos costes salariales[101]. Sin embargo, nada asegura que aproveche la oportunidad. También de (h20) arranca dos resultados posibles con tasas de ganancia positivas si se cumple que:

(h21) $$\frac{f_2}{f_1} < \frac{R_2}{R_1}$$

siempre que $\boldsymbol{f}_1 > \boldsymbol{f}_2$. La otra posible solución es con el signo de ambas inecuaciones cambiado. Nada garantiza que eso sea así y pueden darse las 3 soluciones: que las funciones (h18) y (h19) de relación entre precio y tasa de ganancia se corten dos veces, se corten una vez o ninguna.

---

[100] Depende del radio de convexidad y de los puntos de corte en los ejes de ambas ecuaciones.

[101] En modelo tan sencillo asimilamos tasa de salarios con costes salariales. No obstante, el modelo puede ser generalizado a costes salarios con tal de sustituir la tasa por estos costes en la función que define el sistema.

I - Sobre los productos no básicos que se auto-reproducen

Remata Sraffa su extraordinario libro *Producción de mercancías por medio de mercancías* con 4 apéndices a modo de notas aclaratorias, como si no le merecieran simplemente una nota a pie de página. Una de ellas, que lleva el largo título de "*Nota sobre productos no básicos que se auto reproducen*", es algo más que una nota aclaratoria como se verá. Sraffa dice que "*consideremos una mercancía que entra en su propia producción en un grado desusadamente grande*"[102]. Párrafos más tarde aclara lo de *desusadamente grande* como la mercancía cuyo *producto neto relativo*[103], es decir, el cociente que surge dividir la diferencia entre el producto y el medio de producción, y el propio medio de producción supera a la tasa de ganancia del sistema. Sraffa no lo dice con estas palabras, pero es lo que quiere decir. Pone un ejemplo -no pone muchos a lo largo de su obra- y dice que si se recogieran 110 unidades de habas de cada 100 sembradas, el sector de las habas no tendría problema mientras la tasa *general* de ganancia del sistema permaneciera igual o menor al 10%, que es justamente el producto neto relativo (o excedente relativo) de las habas[104]. El problema surgiría si la tasa general de ganancia subiera por encima del 10% por una bajada, por ejemplo, de los salarios[105]. Y he dado una pista dos veces sobre el punto crucial y es el de que *la tasa general de ganancia* depende del conjunto del sistema; un segundo punto decisivo es que la mercancía protagonista -las *habas*- no puede influir en la tasa de ganancia general porque es una mercancía *no básica*, es decir, no es consumida como medio de producción por ningún otro sector de la economía, por lo que tampoco puede influir en los precios del resto del sistema y, por ende, en la tasa de ganancia[106] general, dado que, en el sistema *esrafiano*, tanto precios como tasa de ganancia y tasa de salarios se determinan conjuntamente, aunque con al menos un grado de libertad. Para terminar con el planteamiento de Sraffa, dice el autor que la subida de la tasa de ganancia general hasta llegar al 10% "*haría aumentar sin límite*" el precio de este producto (las habas del ejemplo). Y si se rebasara el 10% de tasa de ganancia general, sólo sería posible "*el reemplazamiento de las otras materias primas si se obtuvieran gratuitamente*". Lo cual tiene su lógica, porque el precio de las habas se haría infinito en términos relativos[107] dado que llegado a ese punto, los medios que emplean las habas como medio de producción deberían comprarse a precio cero, es decir, en forma de regalo. Es verdad que todo esto se hace difícil de seguir sin ayuda de las matemáticas[108] por más que se empeñara el gran Sraffa en utilizar exclusivamente razonamientos económicos, cosa que hace, por cierto, magistralmente casi siempre.

Antes de entrar en los aspectos formales habría que aclarar que el caso planteado por Sraffa no es el caso extremo de un sector que no tuviera comunicación con el resto del sistema, aunque compartiera las mismas tasas de ganancia y de salarios, porque, si bien este sector -*el de las habas*- no es suministrador de esos bienes al resto del sistema, si compra del resto del sistema -y se puede suponer que de todo el sistema- como medios de producción los productos finales de este. No es, por lo

---

[102] Pág. 125 de *PMPM.*

[103] Este concepto no es de Sraffa sino de este modesto autor, por lo que pido disculpas por tal atrevimiento.

[104] (110 habas recogidas - 100 habas sembradas) / 100 habas sembradas = 10%

[105] Aunque no parece posible que otra variable monetaria puede influir en la subida de la tasa de ganancia general

[106] Tampoco puede influir este sector -el de las habas- el salario general del sistema, pero Sraffa centra inteligentemente en la tasa de ganancia en lugar del salario por lo que luego se verá.

[107] Es decir, en términos de las mercancías suministradas.

[108] Mi opinión es que Sraffa debía tener las ecuaciones que le llevaban a sus conclusiones a la vista, pero esto es algo que está por saber con certeza por ahora.

tanto, un sistema aislado. No estamos pues en el caso del *trigo ricardiano*, donde se vendía a sí mismo el trigo (igual que el caso de las habas) a la par que no utilizaba ningún medio ni compraba nada del resto del sistema (aquí está la diferencia). Para caracterizar formalmente lo que nos dice Sraffa en este apéndice hay que particionar en 4 trozos tanto la matriz de productos finales del conjunto del sistema ***Y*** como de medios de producción ***X*** de la siguiente manera:

(i1) $$Y = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \Lambda & Y_{1,n-1} & Y_{1,n} \\ M & O & M & M \\ Y_{n-1,1} & \Lambda & Y_{n-1,n-1} & Y_{n-1,n} \\ Y_{n,1} & \Lambda & Y_{n,n-1} & Y_{n} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \Lambda & X_{1,n-1} & X_{1,n} \\ M & O & M & M \\ X_{n-1,1} & \Lambda & X_{n-1,n-1} & Y_{n-1,n} \\ X_{n,1} & \Lambda & X_{n,n-1} & X_{n} \end{bmatrix}$$

Las matrices de productos finales ***Y***, de medios ***X***, de trabajo ***L*** y de precios ***P*** serán:

(i2) $$Y = \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_A & X_B \\ X_C & X_D \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} La & Lb \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P_a & P_b \end{bmatrix}$$

donde:

(i3) $$Y_A = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \Lambda & Y_{1,n-1} \\ M & O & M \\ Y_{n-1,1} & \Lambda & Y_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \qquad Y_B = \begin{bmatrix} Y_{1,n} \\ M \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

$$Y_C = \begin{bmatrix} Y_{n,1} & \Lambda & Y_{n,n-1} \end{bmatrix} \qquad Y_D = Y_n$$

(i4) $$X_A = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \Lambda & X_{1,n-1} \\ M & O & M \\ X_{n-1,1} & \Lambda & X_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} X_{1,n} \\ M \\ X_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

$$X_C = \begin{bmatrix} X_{n,1} & \Lambda & X_{n,n-1} \end{bmatrix} \qquad X_D = X_n$$

(i5) $$L_A = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \Lambda & L_{1,n-1} \end{bmatrix} \qquad L_B = L_n$$

$$P_a = \begin{bmatrix} P_1 & \Lambda & P_{n-1} \end{bmatrix} \qquad P_b = P_n$$

De estas matrices podemos establecer la ecuación que define el sistema y que responde al problema planteado por Sraffa en su apéndice B.

(i6) $$\boxed{PY = \begin{bmatrix} Pa & Pb \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} = (1+g) \left[w \begin{bmatrix} L_a & L_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_a & P_b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_A & X_B \\ X_C & X_D \end{bmatrix} \right]}$$

La (i6) nos da las ecuaciones de precios, tanto la de los precios $\boldsymbol{P}_a$ de las ***n-1*** mercancías básicas, como la del precio $\boldsymbol{P}_b$ de la singular mercancía de la que habla Sraffa: las habas. Estas son:

(i7) $$P_a Y_A + P_b Y_C = (1+g) \times \left[wL_a + P_a X_A + P_b X_C \right]$$

(i8) $$P_a Y_B + P_b Y_D = (1+g) \times \left[wL_b + P_a X_B + P_b X_D \right]$$

De la (i7) se despeja el vector de precios $\boldsymbol{P}_a$ de bienes y servicios básicos y queda:

(i9) $$P_a = \left[w(1+g)L_a - P_b\left[Y_C - (1+g)X_C \right]\right] Y_A^{-1} \left[I - (1+g)A_a \right]^{-1}$$

siendo $\boldsymbol{A}_a = \boldsymbol{X}_A \boldsymbol{Y}_A^{-1}$ la matriz de requerimientos de las mercancías básicas. Viendo (i9) parecería que los precios de los bienes básicos $\boldsymbol{P}_a$ depende, entre otras variables, del precio del bien de autoabastecimiento no básico $\boldsymbol{P}_b$, es decir, de las habas de Sraffa. Pues no es cierto, porque el vector $\boldsymbol{Y}_C$ es cero, dado que es precisamente el vector fila que suministra -debiera suministrar- medios de producción (las habas) a los otros sectores, es decir, al resto de las columnas excepto la última, que es justamente la de las habas y que se suministra así mismo ($\boldsymbol{Y}_D$). Si $\boldsymbol{Y}_C$ y $\boldsymbol{X}_C$ valen cero (no hay actividad), la (i9) queda:

(i10) $$P_a = \left[w(1+g)L_a Y_A^{-1} \right] \times \left[I - (1+g)A_a \right]^{-1}$$

En (i10) se comprueba que los precios $\boldsymbol{P}_a$ de los bienes básicos dependen sólo de sus propios medios ($\boldsymbol{A}_a = \boldsymbol{X}_A \boldsymbol{Y}_A^{-1}$), de sus propios productos finales ($\boldsymbol{Y}_A$), de la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$ y de la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$, que se determinan conjuntamente por este sistema de ***n*-1** ecuaciones con ***n*+1** incógnitas. En efecto, tenemos ***n*-1** precios, una tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ y una tasa de salario $\boldsymbol{w}$. Hay, por lo tanto, dos grados de libertad. Una de ellos se puede eliminar tomando un precio como numerario; el otro grado de libertad no se puede eliminar si se quiere respectar la filosofía que entraña la obra de Sraffa. Según esta, la distribución de la renta y riqueza -representada en el modelo por el conjunto de valores de tasa de ganancia y de salarios que satisfacen (i10)- no es resuelta técnicamente por ningún elemento del sistema, sino por la sociología, por las relaciones de conflicto de la sociedad o, simplemente, por la luchas de clases, según los gustos. Aquí no hay *productividades marginales,* ni *relaciones marginales de sustitución, ni costes marginales,* ni *utilidades marginales,* que determinen precios, salarios y ganancias, niveles de producción y utilización de factores por sí solos, sino que es el conjunto del sistema, representado en esta ocasión por (i10), quien lo determina, aunque siempre con un grado de libertad.

Vayamos ahora a la ecuación (i8) y despejemos de ella el precio de la mercancía objeto de análisis de Sraffa y de este artículo: las habas. Sale que:

(i11) $$P_b = \frac{w(1+g)L_b + P_a\left[(1+g)X_B - Y_B\right]}{Y_D - (1+g)X_D}$$

De (i11) son destacables al menos tres cosas: 1) En primer lugar vemos que, a diferencia de la ecuación anterior de precios del sistema de mercancías básicas, aquí el precio de las habas, es decir, de la mercancía *no básica con autoabastecimiento*, depende del resto de los precios del sistema $\boldsymbol{P}_a$; 2) Las tasas de salarios $\boldsymbol{w}$ y de ganancia $\boldsymbol{g}$ vienen dadas por el sistema anterior y no puede este sector (el de las habas) influir en ellas. Diríamos, emulando a la teoría de la competencia perfecta, que este sector es *ganancia-aceptante* y *salario-aceptante*; 3) Si nos fijamos en el denominador de (i11), se puede comprobar que tiende a cero si $\boldsymbol{X}_D$ tiende a $\boldsymbol{Y}_D/(1+\boldsymbol{g})$, y si eso ocurre los precios tienden a infinito. Quedaría:

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(i12) $$si \quad X_D \rightarrow \frac{Y_D}{1+g} \Rightarrow P_b \rightarrow \infty$$

con lo que se cumple lo que señala Sraffa en el apéndice para las mercancías no básicas que se autoabastecen (las habas del ejemplo), porque que se cumpla (i12) es como decir que el *producto neto relativo* o *excedente relativo* de este producto tiende a cero. Sraffa dice que esto no ocurriría para las mercancías básicas. Es verdad que, contemplada la ecuación (i10) de mercancías básicas, no parece que eso pueda ocurrir, pero a mí la explicación que da Sraffa no me convence[109]. Luego veremos el tema con más detenimiento. Si ahora sustituimos los precios del sistema de mercancías básicas $\boldsymbol{P}_a$ -es decir, la ecuación (i10)- en la ecuación de la mercancía que se autoabastece (i11) queda:

(i13) $$\boxed{P_b = \frac{w(1+g)L_b + \left[w(1+g)L_a Y_A^{-1}\right]\left[I-(1+g)A_a\right]^{-1}\left[(1+g)X_B - Y_B\right]}{Y_D-(1+g)X_D}}$$

Viendo (i13) en un primer momento resultaría sorprendente que el precio $\boldsymbol{P}_b$ de esta mercancía dependa de las mercancías básicas teniendo en cuenta que hemos dicho que no suministra su producto al resto del sistema, aunque sí parece lógico que le influya la ***n***-ésima columna, es decir, la columna que representa las compras del sector de las habas al resto de los sectores. Sin embargo, el resto del sistema influye en el considerado por Sraffa, no sólo por las tasas de salario y de ganancia determinadas autónomamente por el sector de bienes básicos, sino que estos sectores, hay que insistir, influyen *indirectamente* en el de las habas porque todo el sistema es suministrador (las ***n*-1** filas de la matriz ***Y***, es decir, $\boldsymbol{Y}_A$) de los sectores que a su vez suministran al de las habas (columna ***n***-ésima de ***Y***, es decir, $\boldsymbol{Y}_B$). ¿Qué ocurriría si el resto del sistema dejara de vender productos al sector de las habas y tuviera éste que contentarse con utilizar su propio producto como *único* medio de producción (el caso del trigo ricardiano)? Ocurriría que la ***n***-ésima columna de ***Y*** hasta el elemento ***n***-ésimo sería cero, por lo que $\boldsymbol{X}_B$ y $\boldsymbol{Y}_B$ también lo serían, y (i13) quedaría en:

(i14) $$P_b = \frac{w(1+g)L_b}{Y_D-(1+g)X_D}$$

donde la determinación del precio $\boldsymbol{P}_b$ sólo depende del trabajo $\boldsymbol{L}_b$ utilizado en la siembra y recolección de las habas, de la cantidad de habas empleada $\boldsymbol{X}_D$ y de la cantidad $\boldsymbol{Y}_D$ cosechada. Aún así, no perdería este bien *el cordón umbilical* que le une al resto del sistema, porque éste le daría como datos las tasas de salario ***w*** y de ganancia ***g***. También puede considerarse, en este caso, que ambas tasas son independientes del resto del sistema: todo depende de las hipótesis de partida.

Hemos dejado pendiente la discusión sobre la idea de Sraffa de que el sector de bienes básicos no le afectaría una subida de la tasa de ganancia -como consecuencia, por ejemplo, de una bajada de salarios- hasta el punto de llegar al infinito si contemplamos el precio de un bien que tiende supuestamente al infinito en términos de otro bien, también básico, que también tiende al infinito, dado que ambos

[109] Ver apéndice 1.

cocientes podrían dar una relación estable y finita. Sraffa no lo dice con estos términos, pero esa es la idea. Formalmente tiene razón el gran economista italiano, porque en un cociente de dos expresiones que tienden al infinito puede pasar cualquier cosa: tender a infinito, a cero o estabilizarse en torno a una constante. Mi opinión es que se trata de un mal uso de las matemáticas, porque si ambos bienes tienden al infinito -junto con el resto- se puede afirmar que en el modelo que tratamos se hacen infinitos los precios. Si, por ejemplo, un bien fuera el aceite y otro el alquiler de los pisos, si ambos crecieran exponencialmente, el conjunto de los precios de los bienes crecería exponencialmente, aunque sea verdad que el precio del aceite en términos del precio de los alquileres se estabilizara. En todo caso se trataría de un mal uso del numerario, porque todo modelo que se acerque a la realidad exige que el sector que produce este producto ha de tener una estabilidad. Esta preocupación viene al menos desde David Ricardo[110].

Otra explicación de este escapismo al infinito es la de que un sector cuya *producto neto relativo*[111] o *excedente relativo* es menor que la tasa de ganancia que le exige el resto del sistema es inviable, salvo que se recibiera como regalo de un sector que no fuera de este mundo las habas necesarias para mantener la tasa de ganancia exigida exógenamente a este sector (Sraffa habla del país de las *hadas*). Además, y dado que la relación entre precio y tasa de ganancia tiene dos ramas, una que se *va* al infinito en el cuadrante positivo de precio-ganancia y otra que *viene* del infinito en el cuadrante negativo, sería como si el resto de los bienes tomaran valor cero, según Sraffa. En mi opinión volvemos al mal uso de las matemáticas, porque muchas de las soluciones de un modelo concretado formalmente en (i11) pueden no tener sentido económico y no hay que buscarles tres pies al gato: carece de sentido las soluciones negativas que *vienen* del infinito negativo (no las que *van* al infinito positivo) en el modelo *esrafiano*, por mucho que Sraffa las busque. Otra cosa es un análisis parcial de un sector donde, para compensar los posibles precios negativos -que no infinitos- se entienda que ello viene compensado por *las subvenciones*. Esto puede contemplarse y modelizarse para algunos sectores concretos, como los de la leche, mantequilla, minería, etc., que históricamente han necesitado de las ayudas para sobrevivir. El problema con los modelos *esrafianos* es que estos se compadecen mal con análisis sectoriales o parciales por la filosofía del autor y derivado de la necesidad del sistema de tener en cuenta la totalidad de las relaciones intersectoriales. Igual ocurre con el análisis input-output, cuyas relaciones con los modelos de Sraffa son evidentes, aunque nacieran en mundos intelectuales y físicos diferentes y como respuestas a problemas diferentes[112].

Retornamos de nuevo a la discusión de Sraffa sobre la imposibilidad de precios tendentes al infinito para el caso de las mercancías básicas, pero con otros argumentos aparentemente. Supongamos que la ecuación que define el sistema, sea de reproducción simple o compuesta *esrafiana*, es como sigue:

(i15) $$PY = (1+g)\left[wL + PX\right]$$

Supongamos ahora que la ecuación que surge de (i15) al hacer cero la tasa de salarios es:

[110] Ver *Principios de Economía Política y Tributación*, pág. 33, edit. FCE.
[111] Cociente entre la diferencia del producto final y el medio de producción, y el medio de producción.
[112] A este dúo de modelos *esrafiano* y de Leontief hay que añadir el modelo de Von Neumann.

(i16) $$PY = (1+g_m)\left[PX\right]$$

siendo g_m la tasa máxima de salarios como consecuencia de la condición anterior. De (i15) y (i16) sale que:

(i17) $$P = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times LX^{-1}$$

En (i17) vemos que la existencia de precios con tendencia al infinito es posible con tal de que la tasa de ganancia g tienda a la tasa máxima de ganancia g_m. De hecho, y aunque en el apéndice *B* que comentamos lo niega, en el capítulo VII sobre la producción conjunta lo afirma y lo demuestra de forma brillante, aunque, como siempre, no haga explícitas las ecuaciones. La explicación de esta aparente contradicción es la de que el apéndice *B* es en realidad una nota a pie de página del capítulo V que trata sobre *la mercancía-patrón*. Es muy posible que a la altura del capítulo V aún no tuviera desarrollada la producción conjunta y sus consecuencias sobre los precios (y también sobre los multiplicadores de la mercancía-patrón).

Anexos I1 e I2

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima

modelo:	**PY** = **(1** + **g) PX** + **wL**				L=	0,19	0,31	0,50	1,0
	productos finales			sumas		medios de producción			sumas
	180	0	0	180		90	50	40	180
Y=	0	450	0	450	X=	120	125	40	285
	0	0	480	480		60	150	200	410
w=	0,7	***g*** =	**19,99%**			0,500	0,111	0,083	0,69
					$A=XY^{-1}$	0,667	0,278	0,083	1,03
	0,0056	0	0			0,333	0,333	0,417	1,08
$Y^{-1}=$	0	0,0022	0			1,500	0,722	0,583	
	0	0	0,0021						
					0,694	**<**	autovalor	**<**	1,083
	excedente físico relativo								
	0,0%	57,9%	17,1%			44%	**< R <**	71%	
$P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}=$				**16,74**	**6,09**	**4,57**			

Excedente neto físico y tasa de ganancia máxima

modelo: **PY** = **(1** + **g) PX** + **wL**

L=	0,19	0,31	0,50	1,0			

	productos finales			sumas		medios de producción			sumas
	180	0	0	180		90	50	40	180
Y=	0	450	0	450	X=	120	125	40	285
	0	0	480	480		60	150	200	410

w= 0,7 ***g*** = **20,01%**

	0,500	0,111	0,083	0,69
$A=XY^{-1}$	0,667	0,278	0,083	1,03
	0,333	0,333	0,417	1,08
	1,500	0,722	0,583	

	0,0056	0	0
Y^{-1}=	0	0,0022	0
	0	0	0,0021

0,694 **<** autovalor **<** 1,083

excedente físico relativo

0,0%	57,9%	17,1%

44% **< R <** 71%

$P=wLY^{-1}(I-(1+g)A)^{-1}$= **-16,74** **-6,09** **-4,56**

La única diferencia entre los cuadros de los anexos I1 e I2 es la tasa de ganancia. En el I1, la tasa de ganancia ***g*** es **19,99**%; en el I2, la tasa es de **20,01**%. En ambos se toma esta tasa como variable independiente. Con 19,99% los precios aún son positivos; con 20,01% ya hemos pasado a negativos. El ejemplo es el mismo que pone Sraffa en su libro y él calcula que la razón-patrón es el 20%. Vemos aquí que la tasa máxima de ganancia (que aquí es ***g***) coincide con la razón-patrón porque ambos están en la frontera del paso de los precios positivos a negativos. El autovalor *mayor* (que es el único que garantiza un vector de precios positivos) de $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ es ***u***=**0,8333**, con el cual se haya la razón-patrón mediante ***R***=(**1**-***u***)/***u***, que es justamente igual a **20**%. El método del recuento de Sraffa falla. En efecto, el menor valor del excedente relativo se da en la primera mercancía y vale cero, a pesar de lo cual sí hay un autovalor -como hemos visto- que garantiza un vector de precios positivo.

Apéndice A: *esbozo de una modelo integrado Keynes-Sraffa*

La dificultad de conectar a Keynes y Sraffa entraña la dificultad de relacionar conceptualmente –menos formalmente- dos visiones económicas diferentes. Keynes construye su "*Teoría General*…" criticando a Marshall, Pigou y la ley de Say; Sraffa lo hace en "*Producción de mercancías por medio de mercancías*" desarrollando a Ricardo en su visión del excedente e intentando resolver el problema de su medición objetiva más allá de la influencia de los precios. Keynes crítica explícitamente la ley de Say de que la oferta crea su propia demanda que, unido al postulado –no se puede entender de otra manera- de la flexibilidad de precios y salarios, lleva a la imposibilidad de la existencia de paro indeseado. Dice Keynes textualmente que uno de los postulados de la economía clásica es el de que "*la oferta crea su propia demanda en el sentido de que el precio de la demanda global es igual al precio de la oferta global para cualquier nivel de producción*"[113]. Y en una analogía un tanto forzada dice que esta igualdad de precios debe considerarse como "*el axioma de las paralelas*" de la teoría clásica. Una crítica de Keynes a los clásicos, en mi opinión más consistente, es la idea marshalliana –según Keynes- de que "*el monto global del ahorro y de la inversión son necesariamente iguales*"[114]. Ante esto, Keynes opone la teoría de la demanda efectiva y la posibilidad de paro indeseado (*desocupación involuntaria*) a pesar de un equilibrio en las macromagnitudes de oferta y demanda agregada –o de ahorro e inversión-. Cosa, por otra parte, que se compadece bastante con la realidad. La primera y principal pieza del esquema keynesiano es sin duda *la propensión marginal al consumo*, que relaciona Consumo y Producción o, dicho con más precisión, *renta disponible para el gasto* (*ingreso total* en la jerga keynesiana); la segunda es la función de inversión como dependiente de *la eficiencia marginal del capital*, concepto que el propio Keynes admite que toma de Irving Fisher y que luego comentamos. El ahorro para Keynes, a diferencia de los clásicos, será un resto, la diferencia entre el producción total y consumo total. Yendo ahora a Sraffa, él nos habla de formas o funciones de comportamiento económico: no tiene una teoría de la demanda, ni de la inversión, ni de la producción. Le preocupa, en cambio, el excedente, la distribución, sus límites y su reparto. El frontispicio de su esquema son *la razón-patrón* y *la mercancía-patrón*. Luego vienen conceptos como la reducción del capital a *trabajo fechado*, la diferenciación entre *bienes básicos y no básicos*, la *producción conjunta*, etc. Son verdaderamente distintos y, en mi opinión, complementarios. La dificultad es cómo casar ambos sistemas de pensamiento sin violentarlos. Lo que viene es un atrevido intento de este maridaje. Y sin embargo, en ese pastiche que es el libro de Keynes, hay un texto que que parecería avizorar la mercancía-patrón de Sraffa. Dice el inglés que "si hubiera alguna mercancía compuesta que pudiera tomarse en sentido estricto como representativa, podríamos considerar la tasa de interés y la eficiencia marginal del capital, en términos de esa mercancía, como si fueran en cierto sentido, la tasa de interés única y la eficiencia marginal única del capital. Pero existen, ciertamente, los mismos obstáculos para lograr esto que cuando se trata de fijar un patrón de valor único"[115]. Yo me inclino a pensar que la sombra de Sraffa es alargada y que el texto anterior es fruto de las conversaciones del inglés con el italiano más que de un arrebato de genialidad de Keynes.

---

[113] *Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero*, FCE, 1992, pág. 31 [The General Theory of Employment, Interest and Money, 1936].
[114] *Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero*, FCE, 1992, pág. 160
[115] *Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero*, FCE, 1992, pág. 200.

Otra dificultad y tentación es la de un posible mal uso de las matemáticas. Estas son imprescindibles para no cometer errores en las conclusiones y precisar en las hipótesis o postulados, pero deben ir por detrás o, a lo sumo, debajo del brazo de los conceptos y estos, a su vez, de la visión general. Y una vez pasado el Rubicón de los planteamientos formales y posibles demostraciones, volver e interpretar sus conclusiones a la luz de los conceptos económicos. Con este proceder no siempre lo uno va con lo otro en rieles paralelos: a veces los desarrollos formales no nos dicen nada porque el divorcio entre estos y los conceptos económicos son inasumibles; otras, las menos, nos pueden llevar a terrenos impensables e ignotos, pero coherentes y significativos en el terreno de los conceptos, en el de la contrastación y modificar, por ende, el propio esquema conceptual. A priori no se sabe. Lo que está claro es que si no se intenta no se consigue. Aquí, como se verá, se llega a una relación entre la propensión marginal al consumo y la razón-patrón insospechada. Su interpretación económica es más difícil, pero tiene un adjetivo: estabilidad.

La función de consumo

Partimos de la ecuación que define el sistema en Sraffa en su primer modelo de producción simple con salarios *post-factum*:

(1) $$PY = wL + (1+r)PX$$

donde ***P*** es el vector de precios **1**x***n***, ***Y*** la matriz diagonal ***n***x***n*** de ***n*** productos finales, ***w*** la tasa de salarios, ***L*** el vector horizontal de inputs de trabajo, ***r*** la tasa de ganancia y ***X*** la matriz cuadrada no diagonal de ***n***x***n*** medios de producción. Yendo ahora a Keynes, dice el economista inglés que "*definiremos la propensión a consumir como la relación funcional entre un nivel de ingreso dado* (*PY*)*, medido en unidades de salario, y el gastos para el consumo* (*C*)"[116]. De Keynes tomamos como nivel de ingreso ***PY*I**, es decir, toda la producción, sin más distingos, para poder enlazar las ecuaciones que definen un sistema con el que definen el otro:

(2) $$C = bPYI$$

siendo ***C*** el consumo keynesiano, ***b*** la propensión marginal al consumo, y cuyo valor está comprendido entre cero y uno, e **I** el vector vertical de unos. Con ello pasamos del vector de valores de productos final formados por el conjunto de las mercancías a un valor agregado de este producto final susceptible de ser comparado con la idea de consumo de Keynes. La inversión keynesiana $\mathbf{I}_{(K)}$ sería equivalente al conjunto de los medios de producción ***X*** del modelo esrafiano agregado mediante sus precios tal que se cumple:

(3) $$I_{(k)} = PXI$$

La suma del consumo ***C*** y la inversión keynesiana $\mathbf{I}_{(k)}$ sería lo que llama Keynes *el ingreso dado* tal que:

[116] *Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero*, pág. 88

(4) $$C + I_{(k)} = PYI$$

con lo que el sistema está en equilibrio y hechos los enlaces entre las variables esrafianas y keynesianas. En efecto, si ahora sumamos miembro a miembro (2) y (3) obtenemos (1). Sigamos. Ahora nos faltan los habituales numerarios esrafianos:

(6) $$PYI - PXI = 1$$

(7) $$LI = 1$$

A todas estas añadimos una última ecuación más típicamente esrafiana que es aquella que resulta de hacer cero la tasa de salarios en la ecuación de definición de sus sistema (1):

(8) $$PY = (1 + R)PX$$

siendo ***R*** la razón-patrón a la vez que la tasa máxima de ganancia en el modelo de producción simple de Sraffa. Pues bien, de este conjunto ecuaciones surge la siguiente:

(9) $$\boxed{w = \frac{(1 + R)b - r}{(1 + R)b}}$$

donde vemos enlazados la razón-patrón de Sraffa ***R*** y la propensión al consumo ***b*** de Keynes. Y aparecen los conceptos keynesianos y esrafianos sin, aparentemente, violentar los sistemas conceptuales de ambos. La ecuación (9) es una función lineal decreciente entre salarios y ganancias, y con ***w***=**1** como ordenada en el origen cartesiano y como pendiente -**1**/(1+***R***)***b***.

Si los salarios hubieran sido *pre-factum*, es decir, si la tasa de ganancia ***r*** se extendiera a todos los costes ***wL***+***PX***, entonces la ecuación de definición del sistema estaría representada por:

(10) $$PY = (1 + r)\left[wL + PX\right]$$

Y el resultado final hubiera sido:

(11) $$\boxed{w = \frac{(1 + R)b - r}{(1 + r)(1 + R)b}}$$

Y la relación entre salarios y ganancias en (11) es una función ¡convexa!, porque su primera derivada es negativa y la segunda positiva, lo que configura un decrecimiento creciente, con puntos de corte tales como ***w***(***r***=**0**)=**1** y ***r***(***w***=**0**)=(**1**+***R***)***b***.

Propensión al consumo y razón-patrón

Sabemos además que existe la relación esrafiana en la producción simple entre tasa de salarios, de ganancia y razón-patrón tal como:

(13) $$w = \frac{R - r}{R}$$

Si ahora eliminamos los salarios entre (9) y (13) queda la relación entre *la propensión del consumo* keynesiano ***b*** y *la razón-patrón* de Sraffa ***R***:

(14) $$\boxed{b = \frac{R}{1 + R}}$$

La ecuación (14) sería ¡*la condición de estabilidad del sistema keynesiano-esrafiano*! Hay que recordar que en el caso de la producción simple de Sraffa, la razón-patrón es a la vez la tasa máxima de ganancia posible del sistema cuando los salarios son cero y una medida del excedente. Pero esta condición sólo puede darse por casualidad, porque responde a motivaciones y actores diferentes: la propensión al consumo representa la cantidad destinada al consumo del total de lo producido, mientras que las tasas máximas de ganancia representa las posibilidades máximas de ganancia de los empresarios. Dicho de otra forma, la producción (***PY*I**), sus rentas derivadas (***wL*I** más ***rPX*I**) y el consumo consiguiente de bienes de consumo (***bPY*I**), sólo pueden reproducir el sistema con estabilidad por casualidad. El desequilibrio entre producción y consumo sería lo habitual en un mundo –como el nuestro- representado por el conjunto ecuaciones anteriores. Y eso que de entrada se ha supuesto equilibrio en la renovación de los medios de producción por (3).

En realidad la ecuación (14) demuestra la dificultad de encontrar leyes de comportamiento económico que satisfagan las condiciones de estabilidad de un sistema económico. A pesar de que hemos tomado y formalizado los fundamentos mínimos de ambos sistemas de pensamiento –el keynesiano y el esrafiano-, llegamos a una ecuación cuyas variables responden a comportamientos y razones absolutamente dispares. Por un lado la propensión marginal al consumo ***b*** nos da el comportamiento del Consumo, uno de los dos elementos vitales del esquema keynesiano; por otro la razón-patrón ***R*** responde a 3 cosas: es la tasa máxima de ganancia en la reproducción simple esrafiana, es una medida relativa del excedente y es una medida de la productividad. Estas 3 últimos aspectos que recoge la razón-patrón responde a motivaciones diferentes y representa aspectos diferentes de los fenómenos económicos que la propensión keynesiana. De ello se deduce que en el mundo real nada hace preveer que pueda darse (14). Y ello, insisto, a pesar de que partimos de los elementos mínimos de los fundamentos, sin los cuales ni existe Keynes ni existe Sraffa en la historia del pensamiento económico. Como se verá más adelante, esta dificultad se resuelve introduciendo dos variables compensatorias: los gastos públicos y los impuestos.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

La función de inversión. Modelo integrado

Vamos ahora a completar el modelo *Keynes-Sraffa* de funcionamiento de una economía con otra pieza básica: la inversión. Hasta ahora no hemos supuesto comportamiento alguno sobre la inversión planeada keynesiana porque al igualarla al conjunto de los medios de producción empleados ha quedado camuflado en esta condición de equilibrio. En Keynes permanece esa confusión entre el capital como una suma de dinero y como un conjunto de bienes de producción, porque sigue la tradición neoclásica de que lo que importa "*es la relación entre el rendimiento probable de un bien de capital y su precio de oferta o de reposición, es decir, la que hay entre el rendimiento probable de una unidad más de esa clase de capital y el costo de producirla*"[117]. Esa relación nos da "*la eficiencia marginal del capital*"[118], concepto que el propio Keynes recoge de Irving Fisher en el libro de este último *Theory of Interest*. Aceptando que un bien de capital en Keynes es equivalente a un medio de producción en Sraffa, la idea de la eficiencia marginal del capital entraña la posibilidad de ordenar los diferentes proyectos de inversión (los del pasado y los planeados) de acuerdo con lo que en lenguaje financiero es *la tasa interna de rendimiento* de las inversiones o tasa de retorno, entendidas estas antes de su concreción como un monto de dinero dispuesto a la compra/creación de bienes de capital físico. Con la salvedad de que Keynes es un economista y no un simple financiero o mero contable –como los que salen de las escuelas de negocios de ahora- y sabe que lo relevante desde el punto de vista global –lo que será luego la macroeconomía- son los bienes de capital físicos y que son activos en sí mismos, mientras que los activos financieros tienen sus correspondientes pasivos (son activos para los que lo poseen y pasivos para los que los emiten), por lo que se compensan entre sí. Y lo que queda en la retribución del capital financiero (o monto de dinero dispuesto para la inversión) es la posibilidad de arañar a la tasa de ganancia derivada de la economía real una proporción de ella. Sin embargo, la dificultad de distinguir entre ambos es grande –e interesada- como se ve en la que el propio Keynes recoge de Fisher de *tasa de rendimiento sobre* coste como aquella que "*usada para medir el valor presente de todos los costos y el de todos los rendimientos igualará ambos*"[119]. Se vuelve de nuevo a la confusión, sin saber exactamente si ese valor presente de los costes se refiere a un monto de dinero o al desgaste del capital (amortización) como medio de producción físico. Sobreentendemos que se refiere a esto último. En definitiva, lo de *la eficiencia marginal del capital* ha de entenderse como un método de ordenación de la rentabilidad de las inversiones en medios de producción (aquí se enlaza con Sraffa), de tal manera que, a mayor exigencia en la tasa de rentabilidad (o rendimiento), menores inversiones (gastos, monto de dinero) en medios de producción; y, a menor rentabilidad, mayor dedicación a aumentar esos medios. Con ello se puede escribir la siguiente ecuación de comportamiento de la inversión (real, en medios de producción):

(59) $$I_{(k)} = PDXe^{-rt}$$

siendo ***P*** el vector de precios de medios ya conocido, ***D*** una matriz diagonal de *coeficientes de proporcionalidad* que nos da el gasto en inversiones en función de los medios utilizados ***X*** y ***r*** *la tasa de interés del capital* que pretende evaluar la eficiencia

[117] *Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero*, FCE, 1992 (1932), pág. 125.
[118] *Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero*, FCE, 1992 (1932), pág. 129.
[119] *Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero*, FCE, 1992 (1932), pág. 129.

marginal del capital keynesiano. Esta tasa es diferente de la tasa de rendimiento interno de las inversiones antes apuntada, pero íntimamente relacionada mediante:

(60) $$I_{(k)}=\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{R_i}{(1+r_k)^i}$$

con $\boldsymbol{r}_k$ como *tasa interna de rendimiento de las inversiones*. En realidad (60) sería también una ecuación de equilibrio, porque esa tasa interna es la que iguala los rendimientos actualizados (lado derecho de la ecuación) con los costes (véase la definición de Fisher anteriormente aludida). Con lo anterior vamos a especificar un nuevo *modelo integrado Keynes-Sraffa* con las siguientes ecuaciones:

(61) $$P_yY+P_zZ=\left[LW+PX\right](I_d+G)$$

donde $\boldsymbol{P}_y$ son los ***m*** precios de bienes de consumo (no básicos), ***Y*** la matriz ***m***x***n*** de ***m***x***n*** bienes de consumo, $\boldsymbol{P}_z$ los ***n*** precios de los ***n***x***n*** productos finales ***Z*** que se utilizan como medios de producción en el período siguiente (básicos), ***P*** los precios de medios del producción de la matriz ***X*** que es ***n***x***n***. El resto de las variables ya se han definido con profusión anteriormente. De (56) surge:

(62) $$P_yY+P_zZ=PX\,(I_d+G_m)$$

al hacer cero la matriz diagonal de salarios ***W***. Entonces $\boldsymbol{G}_m$ sería la matriz de tasas de ganancia máxima que ya hemos visto que se puede estimar mediante $\boldsymbol{G}_m=\boldsymbol{MX}^{-1}\boldsymbol{Y}$, siendo ***M*** una matriz diagonal que establece esa proporcionalidad entre tasas máximas y relaciones producto/medio, aunque en este caso puede variar esa relación al separar en el producto final bienes de consumo ***Y*** y medios de producción producidos ***Z***. La ecuación de equilibrio del sistema keynesiano es como sigue:

(63) $$P_yYI+P_zZI+I_M=C+I_{(k)}+G_P+E_X$$

A veces se presenta la anterior como una identidad, pero es un error, una manera de sobrevivencia de la *ley de Say*. Que es un equilibrio –si lo es- se debe a que los actores de esas demandas y ofertas no son los mismos, o al menos, no coinciden exactamente, y las motivaciones son distintas. Partimos de entrada de esa situación y que los precios, su variabilidad, han obrado el milagro de (63). La ecuación del consumo ***C*** es la keynesiana habitual de aquel como una proporción estable de la renta disponible para el gasto, que traducida al modelo que presentamos, es el conjunto de bienes de consumo ***Y***:

(64) $$C=b\left[P_yYI-T\right]$$

que no exige más explicación, aunque recordamos que ***T*** son los impuestos (todos) del sistema y ***b*** la propensión al consumo keynesiana. Pues bien, del conjunto de ecuaciones que van de la (59) a la (64), donde la (61) y (62) son esrafianas y el resto keynesianas, obtenemos el multiplicador de la renta (del producto de bienes de consumo en nuestro caso):

(65) $$P_y YI = \frac{1}{1-b} \times \left[G_P - bT + E_X - I_M + PDXe^{-rt} I - P_z ZI \right]$$

Al igual que en los modelos anteriores, la ecuación (65) sólo puede existir con el signo de igualdad si el Gasto Público $\boldsymbol{G}_P$ y los impuesto $\boldsymbol{T}$ se establecen a propósito. Si ahora establecemos la condición de equilibrio presupuestario, es decir, si hacemos que:

(66) $$G_P = T$$

y despejamos el Gasto Público $\boldsymbol{G}_P$, se obtiene la ecuación que podríamos llamar de *gasto público compensatorio*:

(67) $$\boxed{G_P = P_y YI - \frac{1}{1-b} \times (E_X - I_M) + \frac{1}{1-b} \times \left[PZ_Z I - PDXe^{-rt} \right]}$$

De la realidad que hay detrás de las variables en (67) podemos asegurar que nada augura que pueda darse la igualdad por las fuerzas del mercado. Veamos: los precios de los bienes de consumo $\boldsymbol{P}_y$ y de medios de producción obtenidos $\boldsymbol{P}_z$ responden, en el mejor de los casos, a las leyes de oferta y demanda de sus mercados, y no tienen que ver ni con el déficit (o superávit) exterior $\boldsymbol{E}_X$-$\boldsymbol{I}_M$, ni con las decisiones de inversión que intenta recoger $\boldsymbol{PDXe^{-rt}I}$; las exportaciones responden a los deseos de consumo de los países con los que se comercia; las decisiones de inversión tienen que ver con los tipos de interés financiero ***r*** con los que se está operando y/o previendo que van a dar en el futuro. Son actores y mercados distintos que responden motivaciones distintas. Sólo desde lo público se puede establecer un nivel del gasto público que produzca la igualdad (67). Vemos ya lo alejado que estamos del modelo de equilibrio *IS-LM* de Hicks-Hansen. Con el fin de simplificar el modelo, vamos a suponer que el valor global los medios de producción producidos ***Z*** es igual al valor de los medios empleados ***X*** y también sus precios, es decir, que se cumpla:

(68) $$P_z ZI = PXI$$

Con ello (62) queda en:

(69) $$G_P = P_y YI - \frac{1}{1-b} \times (E_X - I_M) + \frac{1}{1-b} \times P\left[X - DXe^{-rt} \right] I$$

Viendo (69) apenas hemos pasado de Keynes a Sraffa, pero es ahora cuando se va a poder utilizar las ecuaciones de definición del sistema (61) más la (62) de definición al hacer cero los salarios ***W***, más la (68) de igualación de medios de producción y sus precios con los productos finales, que van a ser medios a su vez en el período siguiente (básicos). Manipulando algebraicamente estas ecuaciones y sustituyéndolas convenientemente en (69) quedan:

(70) $$P_y YI = G_p + \frac{1}{1-b} \times \left[(E_X - I_M) + LW(I+G)(G_m - G)^{-1}(X^{-1} DXe^{-rt} - I_d \right] I$$

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(70b) $$\boxed{G_P = \frac{1}{1-b} \times (I_M - E_X) + \frac{1}{1-b} \times LW(I+G)(G_m - G)^{-1}\left[(1-b)G_m + I_d - X^{-1}DXe^{-rt}I_d\right]I}$$

Aquí las variables monetarias son las ganancias, los salarios y la tasa interna de rendimiento de la inversión ***r***, que está relacionada con la eficiencia marginal del capital de Keynes con (59) y (60). No así, en cambio, las ganancias máximas, que hemos visto que dependen muy directamente de los medios de producción y de los productos finales (58). En este *modelo integrado Keynes-Sraffa* no hay posibilidad de que los precios jueguen ningún papel equilibrador en la ecuación anterior simplemente porque no están. Tampoco pueden jugarlo salarios y ganancias que responden a los deseos de trabajadores y empresarios en mejorar sus rentas. Y nada tiene que ver éstas con los posibles déficits comerciales o con las decisiones de inversión, con la salvedad de que es posible que una mejora de las ganancias ***G*** permitan abordar inversiones en medios de producción independientemente de las tasas de retorno o rendimiento de las inversiones planeadas.

Resulta tentador establecer algún tipo de relación formal entre estas tasas de ganancia ***G*** en pos de la disputa del excedente y las tasas de rendimiento interno ***r*** que van a incidir en la inversión futura. Ello exige conectar dos mundos muy diferentes: el esrafiano de la lucha por el excedente y el keynesiano de la inversión a través de la evaluación de la eficiente marginal del capital. Demasiado distintos como para forzar su conjunción. Mejor dejar ambas como variables exógenas, al menos en este modelo. Cosa distinta sería si completáramos el mismo con la teoría keynesiana de la demanda de dinero y su preferencia por la liquidez[120]. En (70) se puede ver que hay una relación creciente (a veces proporcional) entre gasto público G_P y déficit comercial (I_M-E_X), propensión marginal al consumo ***b***, salarios ***W***, tasas de ganancia ***G*** y tasa de rendimiento ***r***. Con las tasas de ganancia máxima es ambiguo. Dicho de otra manera, *si se quiere mantener el equilibrio en la economía y no caer en ciclos o recesiones –o lo contrario-, ha de aumentarse el gasto público si aumenta el déficit comercial, la propensión al consumo, los salarios, las tasas de ganancia y la tasa de rendimiento interno de las inversiones planeadas; ha de reducirse si ocurre lo contrario.*

La mayor parte de la explicación económica de estas dependencias que surgen de (70) se derivan de la necesidad de mantener en equilibrio del sistema retratado en (63), pero también al efecto multiplicador típico keynesiano de la propensión al consumo ***b***, que hace que un aumento suyo haga aumentar las rentas y con ello el consumo y la producción. Este es el caso de los impuestos ***T*** en (64), que aumentan al aumentar la propensión al consumo debido a un aumento de la renta disponible para el gasto derivada del consumo en bienes (no básicos ***Y***); con ello ha de aumentarse el gasto público para mantener el equilibrio presupuestario. Por otro lado, en (68) vemos que si da equilibrio en el sector exterior –es decir, si I_M=E_X- el resultado final es nulo en cuanto a la incidencia en el gasto público, pero si se produce un déficit porque las importaciones superen a las exportaciones, ha de aumentarse el gasto público para igualar la demanda con la oferta en (63); ha de reducirse si sucede lo contrario. En este modelo no hay un mecanismo vía *producción-renta-consumo* que permita equilibrar los déficits exteriores, porque no se ha supuesto dependencia entre las importaciones y la producción interna, pero en los modelo keynesianos habituales sí se hace.

[120] *Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero*, FCE, 1992 (1932), pág. 218.

No hemos tomado ningún numerario, por lo que estas afirmaciones se pueden hacer en términos relativos, es decir, en términos del numerario que se tome. En el caso de Keynes el candidato a numerario sería lo que el llama *los salarios nominales*[121]*.* No se ha hecho porque eso nada hace cambiar las conclusiones, salvo que se suponga un comportamiento distinto para el consumo entre los salarios nominales y los reales (descontados la inflación).

Resumiendo lo aportado, se puede afirmar que en este modelo de la función de consumo y de inversión ambos economistas han aportado lo característico de ambos: Keynes su función de consumo basado en la estabilidad (supuesta) de la propensión al gasto y la decisión planeada de inversión basada en la eficiencia marginal del capital (íntimamente relacionada con la tasa de rendimiento interno de la inversión); Sraffa ha aportado su modelo económico de formación de los precios basado en un margen sobre los costes (ecuación de definición del sistema) más la tasa máxima de ganancia dependiente los medios de producción y productos finales, que es en sí misma una medida del excedente. Y del maridaje de ambos se ha producido una verdadera integración en (70), donde han desaparecido los precios y nos hemos quedado con lo característico de ambos: propensión al consumo, tasa de interés según eficiencia marginal, tasas de ganancia, tasas de salarios y tasas máxima de ganancia como medida del excedente. Y este modelo corrobora la idea de Keynes de la demanda efectiva. De hecho, la igualdad en (70) sólo es posible mediante un acto deliberado del Estado aportando un gasto público equilibrador. Y nos indica el camino antes señalado para combatir el ciclo. Y todo eso a pesar de las concesiones al equilibrio que se han hecho: se ha partido de un equilibrio entre la demanda agregada con la oferta agregada (63), se ha equilibrado el presupuesto (66) y se han igualado los medios y precios de los productos producidos con los empleados (68). La visión neoclásica –imperante en los textos que se enseñan- ha quedado abandonada, las neo-keynesianas amoldables a los supuestos neoclásicos de flexibilidad de precios y salarios también quedan apartadas, y la keynesiana de la demanda efectiva ha mostrado los límites y las condiciones previas para mantener su eficacia en la lucha contra los ciclos y crisis mediante una política compensatoria del gasto público. El modelo se podría complicar aún más si hiciéramos depender las importaciones de la producción interna o si no se respetaran los equilibrios mencionados.

Apéndice B: *Sraffa, Samuelson y la función subrogada*

La historia es muy conocida en la teoría del capital. En los años 30 Joan Robinson puso negro sobre blanco el corazón de la teoría neoclásica-marginalista[122]. Se corresponde con el núcleo duro de la Microeconomía actual o, al menos, con la teoría de la distribución y asignación de recursos de entonces y actual. Robinson se preguntó aquello de "qué es el capital". De esa pregunta surge inmediatamente dos más: cómo se mide y cómo se agrega. En 1961 Joan Robinson visita al MIT donde ejercía de guía P. Samuelson y le dedica un artículo que se haría famoso: "*Parábola y realismo de la teoría del capital: la función de producción sustituta*"[123]. Samuelson demostró tener cierta sorna por su dedicatoria a uno/a de los economistas más

[121] *Teoría General del Interés, la Ocupación y el Dinero,* FCE, 1992 (1932), pág. 231.

[122] *The Production Function and the Theory of Capital*, Review of Economic Studies, 1953.
[123] *Parable and Realism in Capital Theory: The surrogate Production Function, Review of Economic Studies*, vol. XXIX, 1962.

críticos con la ortodoxia como era la economista británica. Desconozco la reacción de Joan Violet Robinson. Samuelson intenta con ello mantenerse en la trinchera de lo que era la ortodoxia, es decir, el conocimiento dominante hasta entonces –y hasta ahora- en la teoría del capital y de la asignación de recursos. Esta teoría, resumiendo de forma extraordinariamente apretada, obtiene –y mantiene- al menos dos conclusiones importantes: 1) el nivel óptimo de producción de cada empresa y sector depende del coste marginal de cada producto; 2) los factores –trabajo y capital, principalmente- se pagan de acuerdo con el valor de su productividad marginal. De alguna manera con ello se justifica dos cosas también: 1) la retribución del capital como factor en pie de igualdad que el trabajo; 2) los salarios deben ir acordes con su productividad marginal que, curiosamente, siempre son crecientemente decrecientes. Y lo son porque el modelo funcional de la teoría nace de una generalización de la teoría de los rendimientos decrecientes en la agricultura (en la intensiva, claro) de David Ricardo[124]. No sigo con esta historia mucho más porque no se pretende en este artículo hacer una revisión, una panorámica, un “survey”, tan de moda en la universidad, porque eso sólo sirve para obtener doctorados y hacer currículos. Intento demostrar simplemente algunas de las premisas inadecuadas y errores que comete Samuelson en su artículo de 1962. También se alarga la cuestión con algunas réplicas al artículo como las de Garegnani, Nuti. Por último se analiza la cuestión con la luz que nos ha legado Sraffa en *Producción de mercancías por medio de mercancías.*

Comienza Samuelson justificando su artículo diciendo que “*he insistido muchas veces en escritos y conferencias sobre el punto de que la teoría del capital puede desarrollarse rigurosamente, no usando ningún concepto de “capital” agregado a la manera de Clark, sino sobre la base de un análisis completo de numerosísimos bienes de capital físico y procesos heterogéneos a través del tiempo*”[125]. Como se ve el intento es loable y ambicioso. Para ello inventa lo que el llama “*la función de producción sustituta*[126]”. Con ello intenta mejorar las parábolas de otro economista neoclásico y gran defensor de la ortodoxia: J. B. Clark. La defensa de esta se basaba en una supuesta equivalencia entre el conjunto heterogéneo de bienes de capital realmente existentes y un bien maleable llamado *capital* que adoptaría todas las formas físicas de los medios de producción. La idea de Samuelson es que cree que “*sería posible compilar el conjunto de la tecnología de la economía en todo un libro compuesto por (tales) funciones de producción figurando en cada página el programa destinado a una actividad determinada*”[127]. Cada técnica o función de producción se concretaría en una relación entre salarios y ganancias a través de coeficientes formados con las variables (en este momento lo serían) *producción*, *trabajo* y *capital*. Samuelson construye una relación *tasa de salario-tasa de ganancia* decreciente y lineal, de tal forma que si las variables físicas no varían (ahora constantes), es decir, si estamos en una página concreta del *libro de funciones de producción*, pasan dos cosas con la relación así construida: 1) a medida que aumenta la relación trabajo/capital disminuye la tasa de salario en términos de la tasa de ganancia (pendiente de la función); 2) lógicamente también, a medida que disminuye, aumenta la tasa salarios. Esto en cuanto al deslizamiento de tasas de salario y ganancia dada la función de producción. Además, si ésta varía porque se pasa una *página del libro*

---

[124] *Principios de Economía Política y Tributación,* 1973, FCE, pág. 53 *[Principles of Political Economy and Taxation].*

[125] *Parábola y realismo en la Teoría del Capital: la función de producción sustituta*, en obra colectiva *Teoría del Capital y la Distribución*, pág. 163, edit. Tiempo Contemporáneo [*Parable and Realism in Capital Theory: The surrogate Production Function*]

[126] *The surrogate Production Function.*

[127] Obra citada, pág. 165.

de funciones, se produce tanto un *desplazamiento* de la línea salarios-ganancias como una pequeña *rotación* (pendiente) de la relación salario-ganancia. Ambas cosas son muy convenientes porque, como ahora veremos en concreto con las ecuaciones que definen el sistema, *el mismo* coeficiente que está presente en la pendiente lo está en la ordenada en el origen merced a algunos más que discutibles supuestos de Samuelson. Y eso hace que los movimientos de las rectas (desplazamientos) de la función salario-ganancia vayan construyendo un conjunto de rectas que prefiguran un conjunto convexo (y no cóncavo). Y esto es absolutamente indispensable para construir, como caso límite mediante un aumento indefinido de las páginas del libro de Samuelson, una función –curva- convexa, cuya primera derivada se negativa y la segunda positiva, es decir, una función crecientemente decreciente.

Entramos ya directamente en las ecuaciones de Samuelson porque sus disquisiciones teoréticas no dan para mucho más. Son estas:

(1) $$P_k = wa_k + (r+u)P_k b_k$$

(2) $$P_c = wa_c + (r+u)P_k b_c$$

Siendo $\boldsymbol{a}_k$ la relación *trabajo empleado/capital producido y* $\boldsymbol{b}_k$ la relación *capital empleado/capital producido*, ambas del sector de bienes de capital (el primero); por otro lado, $\boldsymbol{a}_c$ sería la relación *trabajo empleado/bien de consumo producido* y $\boldsymbol{b}_c$ la relación *capital empleado/bien de consumo producido*, estos dos últimos en el sector de bienes de consumo. $\boldsymbol{P}_k$ y $\boldsymbol{P}_c$ serían los precios de los bienes de capital y los de los bienes de consumo, respectivamente; $\boldsymbol{w}$ la tasa de salarios, $\boldsymbol{r}$ la tasa de ganancia, $\boldsymbol{u}$ la tasa de amortización (depreciación) del capital (de su valor). Lo que intenta Samuelson con este ejemplo de dos sectores –porque si aumentara el número de sectores no podría llegar a la conclusión pretendida como veremos con Sraffa- es deshacerse de los precios para dejar las dos ecuaciones en una sola que nos relacione tasa de salarios $\boldsymbol{w}$ y tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ más tasa de amortización $\boldsymbol{u}$. Pues bien, ya de entrada comienzan las trampas de Samuelson. Véamoslas una a una:

1) En la ecuación (1) está camuflado un hecho: que la economía representada por las dos ecuaciones *no* es viable. En efecto, la (1) nos dice que el capital producido es insuficiente para entregar una parte correspondiente al sector primero de estos bienes y al segundo sector de bienes de consumo. Es decir, Samuelson nos ha escamoteado una tercera ecuación que sería:

(3) $$K = f(K_k + K_c)$$

que relaciona los bienes de capital totales con su empleo entre los dos sectores en que se ha dividido la economía, aún cuando no estuviéramos en una situación de equilibrio. Un caso particular de (3) sería el de equilibrio entre el capital utilizado en los sectores y el producido en el sector de bienes de capital. Su ecuación vendría dada por:

(3bis) $$K = u \times (K_k + K_c)$$

La (3) es importante porque, con ella en la mano, la ecuación (1) de Samuelson se convierte:

(4) $$P_k = w\frac{L_k}{f(K_c + K_k)} + (r+u)P_k \frac{K_k}{f(K_c + K_k)}$$

La ecuación de bienes de consumo, por su lado, quedaría:

(5) $$P_c = w\frac{L_c}{C} + (r+u)P_k \frac{K_k}{C}$$

Ahora sí tenemos un sistema de equilibrio y de economía viable –que es lo menos que se puede pedir- porque el sector de bienes de capital (1) produce para sí mismo ($\boldsymbol{K}_k$) y para el de bienes de consumo ($\boldsymbol{K}_c$) de acuerdo con (3) y (3bis). Esto va a tener importancia porque los coeficientes van a determinar tanto la ordenada en el origen de la recta salarios-ganancias como su pendiente.

2) Samuelson, en su intento de eliminar los precios, establece la siguiente ¡increíble! ecuación:

(6) $$P_k = P_c$$

Es decir, iguala los precios de los productos de capital con los de los bienes de consumo[128]. Con esto comento dos errores a cual más grave: 1) No tiene ningún sentido económico igualar precios de los bienes finales de consumo con los de capital porque, sólo por casualidad, pueden serlo; 2) los precios no son cantidades absolutas sino relativas. Son *unidades monetarias por unidad de un bien* (consumido, producido, vendido, etc.), de tal forma que no se pueden establecer signos de igualdad entre cantidades heterogéneas. Samuelson va más allá que los propios neoclásicos -a los que intenta enmendar la plana- porque con ello homogeniza no sólo los bienes de capital entre sí, sino estos con los de consumo. Lo que sí se puede hacer es dividir las ecuaciones entre un precio (numerario) para eliminar uno de los precios.

3) Incluso aunque hubiera actuado correctamente en los dos casos anteriores, Samuelson se encontró con una papeleta insalvable para la defensa de la concepción neoclásica: si quería llegar a una relación lineal apropiada entre tasa de salarios y de ganancias debía establecer la siguiente relación a partir de sus propios coeficiente (con los defectos anotados en (1):

(7) $$a_c = a_k \quad y \quad b_c = b_k$$

Dicho con palabras, que las relaciones *trabajo/consumo* y *trabajo/capital* fueran iguales en ambos sectores, que es justamente ¡la igualdad que establece Marx de composiciones orgánicas de capital entre sectores! Esta advertencia la dejó escrita Amit Bhaduri[129] en 1969, aunque cabe suponer que se lo advirtieran oralmente otros economistas. Con esto último no sigo porque es ya ampliamente conocido y señalado aunque no deja de ser paradójico que para construir –reconstruir- un pilar básico de la

[128] Pág. 181 de *Parábola y Realismo …*
[129] *On the significance of recent controversies on Capital Theory: A marxian view*, Economic Journal, 1969.

teoría del capital y, por tanto, del paradigma neoclásico, tuviera que recurrir Samuelson[130] a Marx.

El resultado final, con todas las premisas anteriores, es que Samuelson llega a la ecuación:

(8) $$\frac{w}{P_c} = \frac{1}{a_k} - \frac{b_k}{a_k} \times (r+u)$$

Sólo hemos cambiado la presentación de la ecuación para demostrar algo que ya hemos comentado anteriormente. En (8) vemos que el coeficiente que participa como *ordenada* en el origen (***a***$_k$) también lo hace en la *pendiente* de ***r***+***u***. Esto, que es consecuencia de los supuestos anteriores, parece inocente, pero no lo es. Ocurre que si, por ejemplo, el coeficiente ***a***$_k$ aumenta, tiene como consecuencia que disminuyen *simultáneamente* la pendiente de la función (8), es decir, ***b***$_k$/***a***$_k$, y la ordenada en el origen, **1**/***a***$_k$. Con ello, ante un aumento del trabajo por unidad de capital –que es lo que es ***a***$_k$-, disminuye tanto la pendiente como la ordenada. Y así se dibuja un conjunto de rectas cuya supuesta envolvente es convexa hacia el origen, que es lo que quería Samuelson. Samuelson fue siempre el chico listo de la clase.

Hay alguna trampa más, pero resultan más perdonables. Una de ellas es la de quedarse en 2 sectores, porque si fuéramos a 3 –como hace Marx en un momento determinado- ya no se podrían eliminar al menos uno de precios dado que tendríamos entonces 3 ecuaciones con 5 incógnitas: 3 precios, una tasa de salarios y una tasa de ganancia. Aun cuando elimináramos una tomándola como numerario, ya nos quedaría un precio. Y no digamos si extendemos el modelo a una economía de ***n*** sectores. Por ahí nos topamos con Leontieff, Von Neumann y, sobre todo, con Sraffa. Y la cosa cambia como veremos. De no hacer trampas Samuelson, tendríamos 3 ecuaciones del siguiente jaez:

(9) $$P_k K = wL_k + (r+u)P_k K_k$$

(10) $$P_c C = wL_c + (r+u)P_k K_c$$

(3) $$K = f(K_k + K_c)$$

(3bis) $$K = u \times (K_k + K_c)$$

Y de la resolución de los 3 primeros sistema de ecuaciones sale:

(11) $$\boxed{\frac{w}{P_c} = \frac{1-(r+u)\times \dfrac{K_k}{f(K_k+K_c)}}{\dfrac{L_c}{C} - (r+u)\times\left(\dfrac{L_c}{C}\times\dfrac{K_k}{f(K_k+K_c)} - \dfrac{L_k}{C}\times\dfrac{K_c}{f(K_k+K_c)}\right)}}$$

[130] En el artículo no hace referencia para nada a esto hecho, por lo que cabe pensar que Samuelson no era consciente de lo que estaba haciendo.

En (11) no se puede llegar a una relación lineal entre salarios relativos ($\boldsymbol{w}/\boldsymbol{P}_c$) y suma de tasa de ganancia más depreciación ($\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}$), porque esta última aparece tanto en el numerador como en el denominador. El resultado es nefasto para la teoría del capital neoclásico, porque (11) puede ser creciente o decreciente, cóncavo o convexo, incluso puede cambiar su crecimiento y su convexidad según valores concretos de los coeficientes. En el denominador entre corchetes sí aparece la relación que da la igualdad de la composición orgánica de capital marxiana al hacer cero la relación:

(12) $$L_c K_k - L_k K_c = 0$$

Con (12) entonces (11) queda:

(13) $$\boxed{\frac{w}{P_c} = \frac{C}{L_c} - \frac{K_k}{f(K_c + K_c)} \times \frac{C}{L_c} \times (r+u)}$$

Aún así, es decir, con el sistema de 3 ecuaciones no nos libramos de que el inverso del coeficiente *trabajo/consumo* del sector de bienes de consumo ($\boldsymbol{L}_c/\boldsymbol{C}$) influya en la ordenada en el origen como en la pendiente de la variable independiente $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}$ (que en este caso es $\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}/\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}_c$). Comparando (13) con (8), se pude ver que el supuesto decisivo que le permite a Samuelson llegar a esa supuesta envolvente es (12), es decir, el recurso a la igualdad de composiciones orgánicas de capital marxiano. ¡Marx intentando sacar del apuro a Samuelson! Es verdad que Marx trabaja con bienes medidos en valores-trabajo, mientras que Samuelson lo hace con unidades físicas, pero esta es su única eximente.

Si utilizamos la ecuación de equilibrio (3bis) en (11) obtenemos:

(11bis) $$\frac{w}{P_c} = \frac{1-(r+u)\times\dfrac{K_k}{u\times(K_k+K_c)}}{\dfrac{L_c}{C}-(r+u)\times\left[L_cK_k - L_kK_c\right]\times\dfrac{1}{C\times u\times(K_k+K_c)}}$$

y queda:

(11bis) $$\frac{w}{P_c} = \frac{(uK_c - rK_k)\times C}{u(L_c+L_k)\times K_c - r(L_cK_k - L_kK_c)}$$

que es la ecuación de equilibrio del sistema de Samuelson, pero subsanado el error de la ausencia de relación entre el capital producido ($\boldsymbol{K}$) y el capital utilizado entre ambos sectores $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{K}_k+\boldsymbol{K}_c)$. Y lo notable de (11bis) es que no hay que hacer ningún supuesto de composiciones orgánicas de capital a lo Marx como hace Samuelson. Si además en (11bis) se hiciera el supuesto de igualdad de composiciones orgánicas, es decir, se cumpliera (12), entonces de (11 bis) saldría:

(15) $$\frac{w}{P_c} = \frac{(uK_c - rK_k)\times C}{u(L_c+L_k)\times K_c}$$

De la (15) obtenemos la ecuación de equilibrio del sistema simplemente trasponiendo términos:

(16) $$uP_cK_cC = w(L_c + L_k)uK_c + rP_cK_kC = 0$$

De (16) se obtiene lo siguiente:

(17) $$w(L_c + L_k) = \frac{P_c(uK_c - rK_k)C}{uK_c}$$

que es (16) pero con las rentas salariales $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{L}_c+\boldsymbol{L}_k)$ despejadas. Y (17) nos da una curiosa relación que surge del modelo de Samuelson mejorado:

(18) $$para\ \ que\ \ w \geq 0\ \ ha\ \ de\ \ ocurrir\ \ que\ \ \ rK_k \leq uK_c$$

Es decir, en este modelo, para que la economía tenga salarios positivos, ha de ocurrir que los intereses sobre el capital empleado en el sector de medios de producción han de ser menores que la depreciación del capital empleado en el sector de bienes de consumo. Hay que considerar que esta conclusión tan peregrina se debe más a la falta de realismo del modelo de Samuelson que a un hecho cotidiano. No obstante, el modelo mejoraría notablemente si partiéramos de la siguiente ecuación de equilibrio entre producción y consumo de bienes de capital:

(19) $$K = (r + u) \times (K_k + K_c)$$

Que obliga a la economía a producir bienes de capital, no sólo para reponerlos [$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{K}_c+\boldsymbol{K}_k)$], sino para pagar los intereses derivados de su uso (suponiendo que los bienes de capital tienen un coste [$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{K}_c+\boldsymbol{K}_k)$] equivalente a su alquiler). Con (19) y con (9) y (10) se puede demostrar que llegamos a la expresión:

(20) $$w(L_c + L_k) = P_cC$$

Y, además, ¡sin tener que hacer el supuesto marxiano de Samuelson de igualdad de las composiciones orgánicas entre sectores! Con (20) tenemos una condición de equilibrio entre sectores, porque nos dice que una economía modelizada con (9), (10) y (20) nos lleva a un equilibrio si las rentas salariales se gastan en el consumo de todos los bienes de consumo. Y (20) también sale de (17), es decir, del modelo de Samuelson, si no se pagara ninguna tasa de ganancia, es decir, si se haciera $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$, como puede comprobarse.

Resumiendo, Samuelson, con tal de llegar a demostrar lo imposible, partió de un modelo sin equilibrio entre sectores, igualó precios de producción y de bienes de capital, recurrió a Marx sin darse cuenta al igualar coeficientes entre factores para sectores diferentes, obligó –implícitamente- a una relación peregrina entre tasas de depreciación y de rentas de capital, y se le escapó la posibilidad de llegar a un modelo de equilibrio entre consumos y rentas. Y después de todo esto, su intento de función de producción convexa es un fiasco porque sólo es posible para valores determinados de los coeficientes aludidos. Sin más comentarios.

De todas las réplicas, la más famosa es la de Garegnani. Este lo hace en 1970 con "*Heterogeneous Capital...*". A pesar de ser Garegnani un economista de máximo nivel, no arranca muy bien Garegnani porque, al traer las ecuaciones de Samuelson, comete un error, cambiando un signo en el denominador de la ecuación equivalente a la (11) nuestra. Sin embargo, ello no cambia el núcleo de la discusión de su crítica porque toda ella se va a cargar en la relación (12). Garegnani no admite el absurdo de Samuelson de suponer que los coeficientes (las composiciones de Marx) *trabajo/capital* y *trabajo/consumo* sean iguales en ambos sectores. Estudia todas las posibilidades para llegar a todas las posibles situaciones de crecimiento o no, de concavidad y de convexidad de (11). Garegnani tira de Euler (funciones homogéneas) e, incluso, de Sraffa, para fundamentar la réplica a Samuelson. Y, sin embargo, quizá porque no le parece suficiente todo el arsenal argumentario, Garegnani convierte la ecuación (11) en:

$$\frac{w}{P_c}=\frac{1-(r+u)\dfrac{K_k}{K}(t)}{\dfrac{L_c}{C}(t)-(r+u)\times\left[\dfrac{L_c}{C}(t)\times\dfrac{K_k}{K}(t)-\dfrac{L_k}{C}(t)\times\dfrac{K_c}{K}(t)\right]} \qquad (21)$$

Y (21) es la ecuación de Garegnani, pero traducida a los signos algebraicos que venimos utilizando[131]. Garegnani convierte (11) con (21) en una función continua, no sólo para la tasa de salarios y de ganancias, sino para los coeficientes, que los hace depender de un *parámetro variable*[132] ***t*** (el le aplica la letra ***u***). Ello tiene las siguientes consecuencias: 1) convierte los coeficientes de Samuelson en funciones continuas dependientes de ***t***; 2) Al hacer eso se sitúa en un espacio de tres dimensiones definido por las variables ***w***, ***g*** y ***t***, en lugar de uno de dos; 3) dado que trata a cada coeficiente como una función continua, (11) se convierte con (21) en una función continua como resultado de operaciones aritméticas de funciones continuas. El resultado es una función continua, aunque con algunos puntos no derivables. El resultado final es que Garegnani llega, de este modo, mediante un atajo que no parece digno de su nivel intelectual, a la envolvente que intentaba llegar Samuelson mediante su conjunto de funciones lineales (con las trampas señaladas). Dicho de otra forma: Garegnani no necesita calcular la envolvente de posibles funciones lineales o de puntos de corte entre funciones porque arranca ya de una envolvente. Y lo que ocurre es que a medida que varia *el parámetro variable* ***t***, va *trasladando* la envolvente si la pretendemos dibujar en un espacio de dos dimensiones[133]. En sus espacio de 3 dimensiones (***w***, ***r***, ***t***), la envolvente sería un plano curvado único. De pillo a pillo.

Otra réplica, aunque indirecta, es la de Nuti en "*Capitalismo, Socialismo y Crecimiento en equilibrio*"[134]. Aquí el capital maleable es una "arcilla" para la que su producción "*que exceda de las necesidades de consumo corriente sea igual a los*

---

[131] Nota 3, pág. 412 de *Heterogeneous Capital* …

[132] Garegnani lo llama *parameter variable*, aunque tal denominación es una contradicción y ***t*** es simplemente un parámetro donde lo que lo hace variable es su relación funcional con los coeficientes. Este parámetro podría ser muy bien el tiempo.

[133] En la pág. 429 de *Heterogeneous Capital*, Garegnani pone un ejemplo que es de por sí una función continua dependiente del "parámetro variable" ***u*** sin ningún tapujo, porque define los coeficientes con funciones continuas de ***u*** en las que hace intervenir al número ***e*** (base de los logaritmos neperianos) para asegurar un crecimiento y/o decrecimiento permanente sin tocar ninguna "asíndota". Esta página y la 412 con su definición formal del modelo son el esqueleto de la argumentación en la que se sostiene toda la réplica.

[134] *Capitalism, Socialism and Sleady Growth.*

insumos de materias primas necesarios para la construcción de máquinas”[135]. Nuti llama ***v*** “al valor actual de un proceso estándar”.

(22) $$v = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i - wl_i}{(1+r)^i}$$

siendo $\boldsymbol{a}_i$ el producto final en el período ***i***, ***w*** la tasa de salarios, $\boldsymbol{l}_i$ el input de trabajo del período ***i*** y ***r*** la tasa de ganancia. Nuti marcha ahora por el camino de la optimización y considera que los salarios serán máximos cuando ***v*** sea cero, y eso le da la siguiente relación:

(23) $$w = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i (1+r)^{-1}}{\sum_{i=0}^{n} l_i (1+r)^{-1}}$$

Esta función, que relaciona tasa de salarios y de ganancia, da lugar a todas las posibilidades: creciente, decreciente, cambios de convexidad según ponderaciones ($\boldsymbol{a}_i$ y $\boldsymbol{l}_i$), que contempla Nuti en el apéndice matemático de su artículo. Todo ya muy lejos de la formulación de Samuelson, donde la variable temporal no existe a pesar de que su propio *libro de elección de técnicas* exigiría el tiempo para pasar de una técnica a otra. Otra trampa más de Samuelson.

Con Sraffa la cosa cambia, porque aquí estamos ante una verdadera alternativa en los fundamentos de la economía, aunque Sraffa no contesta directamente al artículo de 1961. Parte Sraffa con la ecuación de definición de su sistema con salarios *post-factum*:

(24) $$PY = wL + (1+r)PX$$

donde ***P*** es un vector de precios **1**x***n***, ***Y*** es la matriz diagonal de ***n*** productos finales, ***w*** la tasa de salarios, ***r*** la tasa de ganancia y ***X*** es la matriz ***n***x***n*** de $\boldsymbol{n}^2$ medios de producción. Despejando los precios de (24) sale:

(25) $$P = wLY^{-1}\left[I - (1+r)A\right]^{-1}$$

donde ***A*** es la matriz de requerimientos tal que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$. Se ha de recordar que a partir de (24) y con la ayuda de *Perron-Frobenius*, obtiene Sraffa la relación:

(26) $$w = \frac{R - r}{R}$$

De (25) y (26) sale:

[135] *Teoría del Capita y la Distribución*, pág. 321, Ed. Tiempo Contemporáneo.

(27) $$P = \frac{R-r}{R} \times LY^{-1}\left[I + (1+r)A + (1+r)^2 A^2 + \Lambda \ + (1+r)^{n-1} A^{n-1}\right]$$

Y, a diferencia la relación monótona creciente entre precios y tasa de ganancia de la función neoclásica (tasa de ganancia igual al valor de la productividad marginal), aquí no se puede decir nada de la evolución de los precios ***P***, porque la expresión (27) tiene un multiplicando decreciente (***R-r***) en ***r*** y otro creciente (la expresión entre corchetes) dado que estamos en la producción simple[136]. El resultado es que (27) puede pasar de decreciente a creciente o al revés, sin que pueda asegurarse una relación monótona entre precios y tasa de ganancia. Lo mismo se puede decir de la relación entre precios y salarios si sustituimos en (27) la tasa de ganancia por la de salarios de (26).

Vamos ahora a *la frontera salario-ganancia*. Si en (24) hacemos cero la tasa de salarios queda:

(27) $$PY = (1+R)PX$$

donde, merced a *Perron-Frobenius*, ***R*** es a la vez la tasa máxima de ganancia del sistema y la razón-patrón. De (24) y (27) se obtiene:

(28) $$P = \frac{w}{R-r} \times LX^{-1}$$

Si ahora post-multiplicamos (28) por ***YI***, siendo **I** el vector vertical de unos, y tomamos como numerario ***PYI*=1**, queda:

(29) $$w = \frac{R}{LX^{-1}YI} - \frac{1}{LX^{-1}YI} \times r$$

Y (29) es la versión seria, rigurosa, extendida a ***n*** sectores y ***n*** bienes y servicios (mercancías en Sraffa) de la ecuación *frontera de salarios-ganancia* de Samuelson (13). En (29), aparentemente tenemos una relación lineal decreciente entre ambas variables. La gran diferencia es que en (29) la inversa de los medios de producción X^{-1} no tiene porqué tener sus elementos todos positivos, por lo que nada garantiza que la expresión $LX^{-1}YI$ sea positiva. Con ello todas las posibles relaciones entre salarios y ganancias están abiertas. Más aún, cada cambio de algún elemento de ***X*** o de ***Y*** supondrá una *traslación* con *rotación* de la función lineal inversa ***w-r*** porque, al igual que ocurría con la ecuación de Samuelson (13), tanto la ordenada en el origen como la pendiente está afectada por un mismo factor ($LX^{-1}YI$). La envolvente será el resultado del cambio de las técnicas de los gestores cuando estén ante la posibilidad de aumentar las ganancias si, con los mismo salarios (punto de corte entre dos rectas como (29) para técnicas diferentes), pueden pasar de una técnica a otra, de un método de producción a otro, incluso de un mero cambio organizativo a otro. El resultado de una posible envolvente de todos estos puntos de corte a consecuencia de este comportamiento empresarial es impredecible, pero lo más fácil es que si los

[136] Es decir, siempre y cuando la matriz **A** de requerimientos tenga las propiedades que exige el teorema de Perron-Frobenius (cuadrada, no negativa e indescomponible), el cual nos da como una de sus conclusiones que la expresión entre corchetes de (27) es creciente.

gestores aciertan, la envolvente sea más cóncava que convexa, es decir, justo lo contrario del modelo neoclásico defendido en la última trinchera por Samuelson. La razón de ello es la de que los gestores deben elegir entre varias técnicas de tal forma que, deslizándose entre salarios y ganancias, pasen de unas a otras (desplazándose), de tal forma que, con la misma tasa de salarios, aumenten la tasa de ganancia. Y esto se dará más fácilmente a medida que se desplacen las fronteras salarios-ganancias desde sus ejes de coordenadas hacia fuera, alejándose de los mismos, con el fin de encontrar a cada nivel de salarios la recta más alejada, la más desplazada hacia fuera que suponga mayor nivel de tasa de ganancia.

Otra forma de abordar el análisis de Sraffa para refutar a Samuelson y, en general, a la teoría del capital neoclásica, es a partir de la función de precios (27) que ahora traemos a colación:

(27) $$P = w \times LY^{-1}\left[I + (1+r)A + (1+r)^2 A^2 + \Lambda\ + (1+r)^{n-1} A^{n-1}\right]$$

A partir del modelo de Sraffa definido por las ecuaciones (24) y (27) más la que se deriva de tomar como numerario el producto neto, es decir, hacer que:

(28) $$PYI - PXI = 1$$

se obtiene la relación:

(29) $$R \times PXI = 1$$

Entonces, post-multiplicando (27) por ***XI***, es decir, la matriz de medios por el vector vertical de uno y despejando la tasa de salario queda:

(30) $$w = \frac{1}{RLY^{-1}\left[I + (1+r)A + (1+r)^2 A^2 + \Lambda\ + (1+r)^{n-1} A^{n-1}\right]XI}$$

Traemos a colación ahora la ecuación de la razón-patrón de Sraffa que surge precisamente en la producción simple que venimos considerando:

(31) $$w = \frac{R-r}{R}$$

Vamos a considerar ahora a (31) no sólo como la ecuación de la razón-patrón de Sraffa para salarios *post-factum*, sino también como una relación salarios-ganancia que define una relación de producción lineal implícita tal y como hace Samuelson en su artículo de 1962 para llegar a la envolvente. Es decir (31) la podemos ver como;

(32) $$w = 1 - \frac{1}{R} r$$

Nos peguntamos ahora cuántos puntos de corte tiene la función (32) y la función de los salarios (30) que define la frontera ganancia-salarios. Para hallarlo sólo tenemos que igualar los salarios de ambas funciones y nos da la ecuación:

(33) $$(R-r)\times LY^{-1}\left[I+(1+r)A+(1+r)^2A^2+\Lambda\ +(1+r)^{n-1}A^{n-1}\right]XI-1=0$$

Pues bien, (33) es *un polinomio* en ***n*** de ***r***, con ***n*** máximos posibles puntos de corte en el campo de los número reales. A cada valor de ***r*** obtenemos el correspondiente valor de la tasa de salarios sustituyendo aquel en (31). Ello supone –o puede suponer- hasta ***n*-1** cambios de convexidad, incluso aunque la función (30) fuera en todo su dominio monótona decreciente. Supone, por tanto, que la relación entre tasa de salarios y tasa de ganancia no es monótona decreciente, cuestión vital para el desarrollo la función neoclásica de producción que ha de mantener esta función siempre convexa para poder *igualar en un solo punto* su relación marginal de sustitución con la relación salarios-ganancia de la restricción presupuestaria. Es una forma más de refutar la función neoclásica de producción, pero que espero que tenga algún elemento de originalidad.

Para llegar a (33) hemos hecho un supuesto simplificador que no es necesario y es el de que las razones-patrón de (30) y (32) sean las mismas. No es necesario porque la función (32) es directamente una relación salario-ganancia en pie de igualdad con (30). Con ello, si $\boldsymbol{R}_1$ es la razón-patrón de (30) y $\boldsymbol{R}_2$ lo es de (32), el polinomio (33) queda:

(34) $$r-R_2+\frac{R_2}{R_1}\times\frac{1}{LY^{-1}\left[I+(1+r)A+(1+r)^2A^2+\Lambda\ +(1+r)^{n-1}A^{n-1}\right]XI}=0$$

Polinomio del que se pueden decir las mismas cosas que de (33), aunque las soluciones concretar de ***r*** y las consiguientes de ***w*** sean distintas.

Apéndice C: *la razón-patrón en El Capital*

Lo que vienes ahora es una sorpresa que ha sido atisbada[137] aunque no demostrada con rigor. Por supuesto que también depende de las hipótesis -siempre discutibles- que se hagan. La obra de Sraffa y de Marx cada vez más me parecen como las dos caras de *Alicia en el país de las Maravillas*, pero con una asimetría: el libro del italiano parece escrito para enmendar los fallos del alemán, aunque esa no fuera ni mucho menos la intención de Sraffa, porque su libro era *un preludio a una crítica a la teoría del Capital*. De hecho *Producción...* podría haberse escrito sin haber leído una línea de El Capital ni ninguna obra de Marx: no hay referencias a él, no hay una teoría del valor en el italiano porque se aceptan la contabilidad de los precios; no tiene una teoría de la acumulación o de la reproducción; tampoco nada sobre las crisis. Es -la del italiano- ahistórica y sólo hace referencia al tiempo cuando trata el tema del trabajo fechado, pero lo hace en un contexto de permanencia de medios y productos cada año, de equilibrio. Quizá por todas estas consideraciones le llevó a Keynes a suponer en el libro de Sraffa.

Abandonamos por un momento ahora la noble guía *esrafiana* para adentrarnos en la volcánica *marxista*. En efecto, vamos a mezclar ahora precios y cantidades con los valores-trabajo de Marx sin entrar a discutir la teoría del valor-trabajo de Marx. Lo que

[137] *Mr. Sraffa´s Rehabilitation of Classical Economics*, R.L. Meek, 1961.

haremos será plantear unas hipótesis concretadas en un sistema de 7 ecuaciones sin más. Como todo esquema es discutible, pero al menos no llama a engaño: lo que se avecina es cierto bajo esas hipótesis; si se cambia algunas de ellas (o varias) ya no lo es. La vara de medir será si son fieles al esquema de ideas de cada uno de los autores, cada uno las suyas: 4 ecuaciones son de Marx, 2 de Sraffa y una de conexión entre ambos esquemas de pensamiento. En el de Marx, la formación de los valores en la producción de mercancías (hoy diríamos bienes y servicios) vendría expresado por esta fórmula:

(C.1) $$HY = C + V + S$$

donde ***HY*** sería el valor trabajo del producto final de cada mercancía, que lo hemos diseccionado como el producto del valor-trabajo unitario ***H*** por la cantidad de mercancías producidas ***Y***; ***S*** sería la plusvalía generada; ***V*** el capital variable que representa el valor de los bienes de consumo del trabajador para la subsistencia de él y de su familia, por último, ***C*** es el capital constante o, como diría J. Robinson, *el ambiente* (*los medios de producción) que acompaña al trabajador*. En términos matriciales sería:

(C.2) $$\begin{bmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix}$$

La segunda ecuación sería la tasa de explotación (de plusvalía).

(C.3) $$e = s_j / v_j$$ para todo ***j*=1** a **n**

donde, siguiendo a Marx, todos los sectores (o mercancías) llevan aparejados la misma tasa de explotación. De aquí surgen ***n*-1** ecuaciones linealmente independientes. La tercera característica que a veces acompaña al esquema marxista , junto a los valores trabajo y la teoría de la explotación, es su consideración de *la composición orgánica de capital* como cociente entre el capital constante y el capital variable igual para todos lo sectores. La ecuación:

(C.4) $$Ko = c_j / v_j$$ para todo ***j*=1** a ***n***

de donde salen también ***n*-1** ecuaciones linealmente independientes. En términos matriciales ambos sistema de ecuaciones serían:

$$\begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} = e \times \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} ko_1 & & \\ & \ddots & \\ & & ko_n \end{bmatrix} = ko \times \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix}$$

junto con el vector de precios ***n*x1 *P***, el de multiplicadores ***Q***, también ***n*x1**, y el vector unitario $\boldsymbol{I}_{nx1}$. Añadimos las ecuaciones de la *razón-patrón* y la de la normalización del sistema de Sraffa, haciendo que el producto neto sea igual a **1.** A estas añadimos dos ecuaciones más que ahora explicamos:

(C.5) $HY = S + V + C$

(C.6) $S = \varepsilon V$

(C.7) $C = \theta V$

(C.8) $PY = (1 + R)PX$

(C.9) $QVI = 1$

(C.10) $PYI - PXI = 1$

(C.11) $QHYI = PYI$

Las tres primeras primera ya se han comentado. La (C.9) es equivalente a la ecuación de normalización del trabajo de los modelos anteriores, solo que en este caso se trata del capital variable. Es la ecuación clave de este modelo de conexión (transformación) de valores a precios, porque elimina un grado de libertad a los multiplicadores al estar en ***Q*** también en (C.11) y porque no hemos dicho bajo qué criterio se calculan estos coeficientes de transformación. Los tomamos como datos, sean cuales sean. La (C.10) es la ecuación de normalización habitual en Sraffa y representa al producto neto global en términos monetarios. Por último, la (C.11) es las suma del producto bruto de toda la economía en términos de valor a la misma macromagnitud en términos de precios. Hacemos ahora el recuentos de ecuaciones y variables y sale:

ecuaciones		variables		datos	
de (C5)	n	H	n	**Y**	n
de (C6)	n-1	S	n	**X**	n
de (C7)	n-1	V	n	**p**	n
de (C8)	n	C	n	**z**	n
(C9)	1	ε	1	**q**	n
(C10)	1	θ	1		
(C11)	1	R	1		
total	**4n+1**	total	**4n+3**		

Es discutible, porque se puede demostrar que, bajo otros criterios aceptables (Morishima[138]) desde el punto de vista marxiano, los precios son siempre mayores que los valores transformados con los coeficientes. Pero también se puede aceptar como marxiano porque está en Marx, aunque no siempre. Si ahora hacemos el recuento entre variables y ecuaciones, aceptando como datos los que se ven también en el cuadro, vemos que el resultado [**4*n*+3**–(**4*n*+1)**] son 2 grados de libertad. Del resultado de solucionar el sistema de ecuaciones anterior surge la ecuación sorpresa:

(C.12) $$\boxed{R = \frac{1}{e + ko}}$$

[138] Pág. 83 *de La teoría económica de Marx*, 1977 (*Marx´Economics*, 1973).

¡La razón-patrón estaba en Marx!

Es verdad que bajo los criterios anteriores, pero ahí queda la ecuación. La razón-patrón *esrafiana* es la inversa de la suma de la tasa de explotación y de la composición orgánica de capital marxianas[139]. Era de esperar un resultado así, puesto que la razón-patrón es la diferencia entre la producción final y los medios de producción empleados en términos de estos últimos y, por tanto, representa la participación de los salarios y los beneficios por unidad de medios de producción empleadas (en términos monetarios); mientras, la suma de la tasa de explotación y composición orgánica de capital representan la inversa de la participación del factor variable (el trabajo) y su plusvalía (ganancias derivadas del trabajo) por unidad de capital constante (medios de producción). Como quiera que detrás de las ganancias está –según la concepción marxista- la plusvalía, la cosa parecía abocada a este desenlace.

Curiosa relación de Sraffa con Marx. El alemán se sirve de la teoría del valor-trabajo, lo centra en la explotación (plusvalía) y lo desarrolla, entre otros supuestos, con lo que define él como *composición orgánica de capital*; Sraffa lo centra sobre la *razón-patrón* y la reducción del capital a trabajo fechado. Lo decíamos antes, son el complemento, como los dos lados del espejo de *Alicia…* Lo que necesitó decir Marx en dos mil páginas lo escribe Sraffa en un centenar. Uno trabaja con valores, el otro con precios. Para Marx *el capital* es una relación social, para Sraffa es trabajo actual y del pasado fechado. En ninguno de los dos aparece el *capital físico* como merecedor de una renta. Marx es determinista[140]; Sraffa nos deja en libertad… condicional. Y sin embargo, se puede pasar de un lado al otro del espejo con la guía de *la razón-patrón* (Sraffa) desde una cara y, desde la otra, con *la tasa de explotación* y *la composición orgánica de capital* (Marx).

Apéndice D: *hacia un esbozo de Macroeconomía puramente esrafiana*

Comenzamos este trabajo tanteando cuál o cuáles podrían ser los modelos de origen esrafiano que podrían presentarse como alternativa al modelo keynesiano/kaleckiano y que fuera el embrión de una Macroeconomía esrafiana. Aunque todo es opinable, parece claro que Sraffa no tiene una función de consumo al modo que lo tiene el binomio Keynes/Kalecki, que además está en el núcleo duro del modelo keynesiano; también tiene esa misma claridad que esa función es ajena a Sraffa, puesto que este no parte en su modelo ni tan siquiera de una función de demanda, sea de bienes de consumo o de inversión. Por lo tanto, un modelo puramente macroeconómico inspirado en su libro básico no podría contar con esa función. Sin embargo, para llegar a tener un desarrollo esrafiano en términos de magnitudes agregadas, parece ineludible incorporar al modelo del turinés una función de consumo porque de lo contrario se entraría en la ley de Say, cosa aún más alejada de Sraffa que la propia función de consumo de Keynes. Ocurre, no obstante, que sin función, ley o

[139] Luigi L. Pasinetti casi llega a esta conclusión en su artículo *Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth* cuando dice que “Sraffa está postulando precisamente la misma relación entra la tasa media de beneficios y las condiciones de producción en su industria estándar que la relación postulada por Marx entre la tasa media de beneficios y las condiciones de producción en su industria de composición orgánica media de capital”.

[140] Caída del capitalismo por disminución de las ganancias ante el aumento de las composiciones orgánicas de capitales.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

mecanismo de consumo apenas podríamos avanzar más allá de sus fundamentos del turinés, con lo que su modelo se volvería estéril para explicar determinados fenómenos como pueden ser los ciclos, las crisis, los aspectos financieros, el papel de los gobiernos en la economía, etc. En mi opinión, lo único que nos está vedado en los posibles desarrollos de modelos esrafianos es la relación entre los dos componentes básicos del excedente: los salarios y las ganancias. Ambos deben depender la una de la otra y no venir dadas por explicaciones o factores productivos.

Sí, en cambio, me parece sostenible una función de inversión que haga depender esta de tipos de interés reales y la amortización de los medios de producción de la cantidad existente en cada momento. Creo que esta interpretación es coherente –aunque pueda haber otras- con el capítulo del trabajo fijo y del referido a la reducción del trabajo fechado del libro de Sraffa. Por ello y sin más dilación, planteamos un posible modelo de raíz esrafiano no keynesiano.

(1) $$P_yY + P_zZ = \left[LW + PX\right](I_d + G)$$

(2) $$P_yY + P_zZ = PX\,(I_d + G_m)$$

(3) $$P_yYI + P_zZI = C + I_k + G_p - T + E_x - I_m$$

(4) $$C = cLWI + d\left[LW + PX\right]GI$$

(5) $$I_k = PDXe^{-rt}$$

(6) $$P_zZI = PXI$$

Salvo la (4) todas las demás ecuaciones las hemos visto antes y justifcado, por lo que no insistimos más en ello. La ecuación que cambia el modelo respecto a lo visto en anteriores epígrafes es precisamente esta. Con ella estamos más cerca de Marx que de Keynes, porque lo que viene a ser la ecuación es una concreción de un supuesto sobre el comportamiento en el consumo: nos dice que la demanda de bienes de consumo ***C*** –el resto son de inversión- está determinado proporcionalmente por las rentas salariales ***LW*I** y por las rentas empresariales (***LW***+***PX***)**GI**, dejando la demanda de medios de producción ***PX*I** igualada con la oferta de estos medios como productos finales $\boldsymbol{P_z Z}$**I**. La matriz de bienes de consumo final ***Y*** puede ser ***m***x***n*** y sus precios $\boldsymbol{P_y}$, **1**x***n***. ***T*** son los impuestos cobrados a los que no se atribuye ninguna relación funcional. Pues bien, de este conjunto de ecuaciones obtenemos la que sigue

(7)

$$\boxed{P_yYI = G_p - T + E_x - I_m + LW\left[(I_d + G)(G_m - G)^{-1}\left[X^{-1}DXe^{-rt} - I_d + dG\right] + cI + dG\right]I}$$

Comparada (7) con su equivalente del modelo anterior vemos que el conjunto de los bienes de consumo $\boldsymbol{P_y Y}$**I** depende de las mismas variables, pero hay una diferencia fundamental: aquí <u>no hay multiplicador</u>. En efecto, al no existir *propensión marginal al consumo* que relacione consumo con renta disponible para el gasto, el consumo no se hace depender de esta renta, sino directamente de las rentas salariales y empresariales (4). Sí, en cambio, es equivalente en lo que atañe al presupuesto público $\boldsymbol{G_p}$-***T***: este es claramente *compensatorio* en este modelo, porque nada hace prever que los comportamientos que recogen los productos finales en bienes de consumo ***Y***, los medios de producción de inicio ***X***, las masas salariales ***LW***, los deseos de ganancias expresados por **G**, los parámetros de consumo ***c*** y ***d***, los coeficientes de inversión ***D***, los tipos de interés exigidos a las inversiones ***r***, la demanda de exportaciones E_x y la de los importadores I_m, sean tales que, puestos en la coctelera de (77), coincidan mediante el signo de igualdad tal como se expresa en esta ecuación. Son actores y egoísmos diferentes. Sólo un saldo presupuestario público deliberado G_p-T puede casar tanta variable, puede hacer posible tanta poligamia. Dicho de otra manera, en este modelo macroeconómico de inspiración esrafiana –pero no imputable a Sraffa- no existen fuerzas económicas que tiendan al equilibrio entre producción y consumo, entre amortización y renovación de las inversiones, entre deseos de ganancias y necesidades salariales. Para equilibrar demandas con ofertas, los deseos con las realizaciones, sólo desde lo público se puede buscar el equilibrio. De (7) obtenemos (8) si despejamos el gasto público:

(8)

$$G_p - T = P_y YI + I_m - E_x + LW\left[(I_d + G)(G_m - G)^{-1}\left[I_d - X^{-1}DXe^{-rt} - dG\right] - cI_d - dG\right]I$$

De (8) sabemos cómo ha de variar el *déficit presupuestario público* G_p–T si aumentan las variables del lado derecho de la igualdad: habrá de aumentarse si aumenta la producción de bienes de consumo ***Y***, si lo hacen sus precios P_y, si aumenta el déficit comercial I_m-E_x, las masas salariales ***LW***, los tipos de interés ***r***; deberá reducirse el gasto público si aumentan las demandas de consumo a través de los coeficientes ***c*** y ***d***, es decir, por cambios de comportamiento o pautas de consumo y no por aumento de sus rentas (que hemos visto que ocurre lo contrario). Lo que ha de hacerse en el gasto público si aumentan las tasas de ganancia ***G*** y las tasas de ganancia máximas G_m queda indeterminado porque depende de los valores concretos de los coeficientes de inversión ***D*** y de los anteriores coeficientes de consumo ***c*** y ***d***.

Del conjunto de ecuaciones que van de la (1) a la (6) aún podemos obtener otra relación entre las variables sin que aparezca implícita el conjunto de los valores de los bienes y servicios de consumo $P_y YI$ porque los grados de libertad nos lo permite. Esta es la (9):

$$\boxed{G_p - T = I_m - E_x + LW\left[(I_d + G)(G_m - G)^{-1}\left[I_d + G_m - X^{-1}DXe^{-rt} - dG\right] - cI_d - dG\right]I}$$

La necesidad de igualar demanda agregada con oferta agregada y de (9) tenemos asegurado el sentido del crecimiento del déficit presupuestario público G_p–T si aumenta el déficit I_m-E_x, las tasas de interés real ***r***, la proporción de las rentas salariales ***LW*** destinadas al consumo, es decir, ***c***, y los coeficientes de proporcionalidad de las inversiones ***D***: en todos los casos la relación es creciente. La explicaciones económicas son como siguen: si aumenta el déficit comercial significa que las exportaciones son insuficientes para equilibrar las importaciones y, con ello, la de mantener el equilibrio entre la oferta agregada $P_y YI + P_z ZI + I_m$ con la demanda agregada $C + I_k + G_p - T + E_x$, por lo que ha de compensarse con un aumento del déficit presupuestario público; un aumento de los tipos de interés reales ***r*** de la economía disminuirá el gasto destinado a las inversiones futuras, por lo que el equilibrio exige la misma acción anterior por la misma causa, dado que las inversiones forman parte de la demanda agregada; por último, un aumento de las pautas de consumo expresado por un aumento del coeficiente ***c*** supondrá un aumento de la demanda agregada que deberá compensarse con una disminución del déficit presupuestario. Del resto de las posibles variables ***L***, ***W***, ***G***, G_m y ***d***, el resultado no es unívoco, y va a depender de los coeficientes de comportamiento en el consumo ***c*** y ***d***, de las tasas de ganancia ***G*** y de los coeficientes de inversión de la matriz ***D***. Damos como parámetros las tasas máximas de ganancia G_m (que dependen sólo de ***Y*** y ***X***), y de los propios valores de productos finales ***Y*** y de medios de producción ***X***.

Por el interés que tiene en el modelo la necesidad o no de aumentar el déficit presupuestario $\boldsymbol{G}_p$–$\boldsymbol{T}$ si aumentan las pautas de consumo reflejadas por los coeficientes $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$, desarrollamos ahora este punto. Para ello vamos a simplificar (9) para valores unitarios a sabiendas de que las mismas conclusiones se obtendrían con la panoplia de tipos de ganancia, salarios y ganancias máximas que representan $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$ y $\boldsymbol{G}_m$. Para ello vamos a hacer que:

(10) $$G = gI_d \qquad W = wI_d \qquad G_m = g_m I_d$$

siendo $\boldsymbol{I}_d$, como siempre, el vector diagonal de unos. O dicho de otra forma, vamos a suponer iguales entre sí todas las tasas de ganancia, las tasas de salario y las tasas de ganancia máximas. Además vamos a dividir (9) por el valor total de los inputs de trabajo medido en horas de trabajo, es decir, entre $\boldsymbol{LI}$. Con esta división y con (10), la ecuación (9) se transforma en:

(11) $$\frac{G_p - T}{LI} = \frac{I_m - E_x}{LI} + \frac{w(1+g)(1+g_m-dg)}{(g_m-g)} - \frac{w(1+g)}{g_m-g} \times \frac{LX^{-1}DXe^{-rt}I}{LI} - w(c+dg)$$

Vamos a partir ahora de que la balanza comercial exterior está equilibrada, es decir, hacemos que:

(12) $$E_x = I_m$$

Además, y por comodidad, vamos a llamar $\boldsymbol{f}$ a:

(13) $$f = \frac{LX^{-1}DXe^{-rt}I}{LI}$$

Ahora ya podemos afirmar con (11), (12) y (13) que el saldo presupuestario ha de ser deficitario, es decir $\boldsymbol{G}_p$ >=$\boldsymbol{T}$, si se cumpliera:

(14) $$\boxed{(1+g)(1+g_m) >= (1+g)(f+dg) + (c+dg)(g_m-g)}$$

que es la ecuación de *equilibrio del sistema*. Y ello ocurrirá si la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}$ permanece por debajo de:

(15) $$g <= \frac{1-f+(1-c)g_m}{f-1+d-c-(1-d)g_m}$$

La inecuación anterior se cumplirá a su vez si las pautas de consumo expresadas por los coeficiente $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ quedan *simultáneamente* como:

(16) $$si\ \ g\ \ cumple\ (15) \quad \Rightarrow c <= \frac{1+g_m-f}{g_m} <= 1 \Rightarrow 1 <= f <= 1+g_m$$

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(17) $$y \quad además \quad d > \frac{1+g_m - f + c}{1+g_m}$$

O con signo contrario, pero ambas simultáneamente. Y (16) vale:

(16bis) $$1 <= f = \frac{LX^{-1}DXe^{-rt}I}{LI} <= 1+g_m = 1+I_hFX^{-1}YI$$

siendo ***F*** un coeficiente de proporcionalidad a determinar e $\mathbf{I}_h$ un vector horizontal de unos, análogo con el vector vertical de unos **I**.

Así vemos la diferencia de este modelo respecto al keynesiano: en este, a mayor propensión al consumo, mayor multiplicador y, como consecuencia, mayor incremento del producto; aquí el resultado del aumento de la correspondiente propensión ***c*** sólo tienen un efecto proporcional en el aumento del producto (7), pero que si ***c*** cumple (16) obliga al déficit presupuestario si la tasa de ganancia ***g*** del sistema permanece por debajo de (15). Otra diferencia son los niveles de gasto público e impuestos: estos son libres, no así sus diferencias.

Uno de los problemas de los modelos neoclásicos es el de tipo de interés que afecta a la determinación de la inversión: ¿de donde surge este? ¿Es una variable endógena o exógena? ¿Es monetaria o real? La solución de Keynes es la de *la eficacia marginal de capital*, que la toma de Clark como hemos visto. Aquí tenemos la oportunidad de convertirla en variable endógena. Si convertimos la matriz $\boldsymbol{e}^{-rt}$ de (16bis) en un escalar, es decir, en un solo tipo de interés y un plazo único de actualización de rendimientos futuros, tomamos además como numerario ***L*I**, es decir, hacemos ***L*I**=**1** y despejamos el tipo de interés ***r*** queda:

(17) $$r >= \frac{1}{t} \times \log_e\left(\frac{LX^{-1}DXI}{1+I_hFX^{-1}YI}\right)$$

Hay que recordar que (17) es la condición final de la condición (15) sobre la tasa de ganancia del reparto del excedente, que obliga a su vez a entrar en un déficit presupuestario. Aunque no es fácil encontrar el sentido económico de (17), lo que sí no dice es que, a partir de un cierto nivel de tipos de interés, las inversiones caen los suficiente (y bruscamente) como para que el presupuesto público deba ir al déficit si quiere compensar esa caída de la demanda agregada (las inversiones son una parte de esta) y mantener el equilibrio entre oferta y demanda agregadas. Es una conclusión acorde con la que surge de los modelos keynesianos, pero con tres diferencias: a) la de aquí la caída es brusca, b) no hay multiplicador -con lo que un efecto tiende a compensar al otro-, c) aquí la variable es endógena. En el caso particular que los coeficientes de renovación de la inversiones ***D*** fueran iguales y unitarios, ***D*** sería una matriz diagonal de unos y (17) se convertiría en:

(18) $$r >= \frac{1}{t} \times \log_e\left(\frac{1}{1+I_hFX^{-1}YI}\right)$$

y dado que $\mathbf{I}_h\boldsymbol{FX}^{-1}\boldsymbol{Y}\mathbf{I}$ es una medida de la tasa máxima de ganancia, es decir, $\boldsymbol{g}_m = \mathbf{I}_h\boldsymbol{FX}^{-1}\boldsymbol{Y}\mathbf{I}$ y (18) queda:

(19) $$\boxed{r >= \frac{1}{t} \times \log_e\left(\frac{1}{1+g_m}\right)}$$

Resumiendo lo anterior, se puede afirmar de acuerdo con este modelo macroeconómico puramente esrafiano que si la tasa de ganancia general del sistema ***g*** es menor o igual que lo señalado en la inecuación (15) y, a consecuencia de ello, los coeficientes de consumo ***c*** y ***d*** se sitúan en los límites de (16) y (17) y si los coeficientes de renovación de las inversiones (***D***) son unitarios, entonces la tasa de interés de valoración de las inversiones o eficiencia marginal del capital (Keynes) ***r*** se sitúa en la medida de (19), por lo que no le queda más remedio al Estado que incurrir al déficit presupuestario ($\boldsymbol{G}_{\text{p}}$–***T***>**0**) si no quiere que se produzca un desequilibrio entre oferta y demanda agregada que acarree una crisis económica a consecuencia del desequilibrio. Una consecuencia es la de que la tasa de interés en (19) es una tasa real y no meramente financiera porque depende de la tasa máxima de ganancia, que depende a su vez de los medios de producción ***X*** empleados y de los productos obtenido ***Y***. Cuando comenzamos en este epígrafe con las ecuaciones que describen el sistema poco hacía sospechar que se pudiera llegar a una relación tan simple entre la tasa de interés ***r*** y la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{\text{m}}$ como la indicada por (17) y/o (19). Esta relación es imposible en los modelos neoclásicos porque estos no incorporan ni por asomo un concepto igual o similar al de tasa máxima de ganancia esrafiana. Este hecho tiene una importancia que no aparece a simple vista. Al tener una variable más como la tasa máxima de ganancia que resulta de hacer cero los salarios se puede incorporar una ecuación más al sistema sin que éste cierre, lo cual evita cerrar el sistema y dejar con un grado de libertad la relación entre salarios y las ganancias. Permanecer con un grado de libertad esta relación es la esencia de la filosofía económica que subyace a cualquier modelo esrafiano que se precie de tal. Es verdad que, a *posteriori*, se puede estimar esta tasa máxima de ganancia como una función lineal de los medios de producción ***X*** y de los productos finales ***Y***, pero esto es una estimación y no una deducción.

Una conclusión general de este modelo es la siguiente: este es compatible con un equilibrio a corto plazo en términos de valor si los precios de los bienes de consumo finales (no básicos en Sraffa) $\boldsymbol{P}_{\text{y}}$ –no importa cómo lo sean los precios de los medios ***P y*** $\boldsymbol{P}_{z}$– son lo suficientemente flexibles como mecanismo de ajuste entre oferta y demanda y van en la dirección del equilibrio general, pero a más plazo la situación de *desequilibrio* será lo normal, salvo que el Estado equilibre la situación con sus saldos presupuestarios. El problema del mecanismo de ajuste señalado -tan caro a los neoclásicos- es que no necesariamente van a ir en la dirección que iguale la oferta y demanda agregadas porque el resultado de las variaciones de los precios $\boldsymbol{P}_{\text{y}}$ son fruto de decisiones descentralizadas de millones de particulares que buscan su propio interés. En este modelo no existe *mano invisible*, a pesar de que existan mercados que equilibren las ofertas y demandas de cada uno de los bienes y servicios producidos. Ello obliga a una actuación rápida del Estado a través del presupuesto. Este modelo macroeconómico de raíz esrafiano es compatible con las crisis y los ciclos y, aunque no los explica del todo (sólo la idea de desequilibrio entre oferta agregada y demanda agregada), permite desarrollar una manera de evitarlos o paliarlos en lo posible mediante una política presupuestaria adecuada, conocidas las variables ***W***, ***G***, $\boldsymbol{G}_{\text{m}}$, ***L***, ***X***, ***Y***, $\boldsymbol{E}_{\text{x}}$, $\boldsymbol{I}_{\text{m}}$, ***r***, ***c***, ***d*** y ***D***.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

Apéndice F: *Morhisima, Sraffa y el teorema fundamental marxiano*

Este trabajo tiene la pretensión de ser una crítica al teorema formulado por *Okishio* y recogido por el gran economista marxista *Michio Morishima*. El resultado, como se verá, resulta sorprendente. Pero una advertencia: nada más lejos de mi intención hacer siquiera un análisis histórico de ambos problemas. Eso ya ha sido hecho, hay mucha literatura al respecto y ha servido y seguirá sirviendo para adquirir doctorados o publicar trabajos de recopilación en revistas especializadas. Sí quiero ser novedoso, creativo en el tratamiento, que es lo único que me mueve al escribir sobre estos temas. Lo curioso es que ambos problemas tienen fama como problemas y apenas ninguna las soluciones que se han intentado; y, lo que es peor, las pocas veces que se estudian estos problemas en la universidad se dedica mucho más tiempos a los primeros que a las segundas. Parece claro que el marxismo, sea clásico, crítico o actualizado, no forma parte del *corpus* de conocimientos de una recién licenciado o graduado e, incluso, de los doctorados, salvo por el clan de los especialistas. Se puede culpar a eso que se llama la ideología dominante, pero creo que también el clan de los marxistas tienen culpa por adoptar -en lugar de estudiar- el marxismo como si fuera un catecismo. En mi opinión, el marxismo, como el marginalismo, o los clásicos, son acreedores de nuestro punto de vista en la medida que tengan algo que enseñarnos a los hombres y mujeres del siglo XXI para tratar los problemas de nuestro siglo y de la historia. Es verdad que siempre ha de haber un grupo -o muchos- especializados en la historia del análisis que busque la lógica de las teorías en el seno de la historia. Bienvenido sea. Es más, para evitar dogmatismo y fundamentalismo, las enseñanzas de economía, física, biología, derecho, etc., y hasta el de las matemáticas, debieran hacerse en el marco de la historia, porque la lógica más pedagógica es la lógica histórica. No ocurre así, desgraciadamente, y de ahí también la deformación y simplificación en la enseñanza universitaria de teorías e ideologías. El marxismo o, en concreto, *El Capital*, deben estudiarse como cualquier otro tipo de conocimiento, filosofía o ideología que ha surgido a lo largo de la historia, al igual que se estudia o se ha estudiado el aristotelismo, el tomismo, el racionalismo, el empirismo, el kantismo, el historicismo, etc., y ha de hacerse críticamente o no será conocimiento sino tan sólo creencia. Otra cosa será la praxis de sus consecuencias teóricas.

Tras estas reflexiones y yendo directamente al grano del tema que define el título, en 1963 N. Okishio[141] demostraba que: "*Para que exista un conjunto de precios positivos es necesario y suficiente que se de un tipo de salarios reales tal que el grado de explotación sea positivo*"[142]. Morishima toma el teorema de Okishio y lo reformula bajo dos aspectos o condiciones: a) la explotación o, dicho en términos más técnicos, la tasa de plusvalía, la arranca el propietario de los medios de producción por el *alargamiento* (sólo) de la jornada de trabajo más allá de la necesario para que el asalariado pueda vivir él y su familia en condiciones históricas dadas. No se entra aquí en temas de alienación, del fetichismo de la mercancía, del trabajo abstracto y concreto, de los procesos de circulación del dinero, mercancías y capitales, etc., que pertenecen a otras esferas de conocimiento, aunque dentro del *corpus* marxista: b) el nexo de unión entre valores y precios lo establece Morishima como hipótesis directamente mediante unos "*números positivos*" (coeficientes) de los que no sabemos cómo se obtienen, pero que Morishima los justifica al suponer que todas las industrias tienen la misma composición orgánica de capital. Que sean positivos es porque van a relacionar precios que previamente se han asegurado que lo son porque deben cumplir la ecuación:

[141] *A matematical Note on Marxian Theorems*.

[142] *Marx´s Economics, M. Morishima*, 1973 [*La teoría económica de Marx*, 1977, edit. Tecnos, pág. 66].

(1) $$p > pA + wL$$

donde ***p*** es el vector de precios, ***A*** la matriz ***n***x***n*** de requerimientos, ***w*** la tasa de salarios y ***L*** el vector de inputs de trabajo. Morishima -que lo toma de Okishio- justifica la ecuación (1) porque parte de que ***A*** cumple los requisitos del teorema de Perrón-Froebenius[143], es decir, ***A*** es cuadrada, no negativa e indescomponible. Sin embargo, y con ser eso perfectamente aceptable, no justifica (1), sino sólo la que sigue:

(2) $$p > pA$$

Luego veremos la importancia de esta diferenciación. Al reflexionar sobre el teorema parecería que los marxistas, que además de deudores del conocimiento y posibles contribuyentes al mismo, son personas que quieren cambiar el mundo y *no sólo interpretarlo*, deberían -deberíamos, no me excluyo- sentirnos satisfechos por este apoyo riguroso del conocimiento a nuestros deseos. Yo, en cambio, no lo estoy. La razón es la de que, dado que el corazón del análisis marxiano se basa en la producción de la plusvalía y su obtención de la misma por parte de la clase de los propietarios por esta condición, si todo al final depende *sólo* del tiempo de trabajo (su alargamiento) ocurren tres cosas: 1) la explotación es inevitable, porque siempre es mayor la población general que la población ocupada, y más aún ésta que la asalariada; 2) esta explotación, según la demostración de Morishima, existe, *sea cual sea la tasa de salarios*, puesto que estos no se hacen explícitos en el modelo; 3) el alargamiento de la jornada no retribuida se producirá no sólo en el sistema capitalista, objeto de análisis de Marx, sino en cualquier sistema alternativo, aunque se erradicaran otros posibles males. Por todo ello, me parece que todo modelo que derive en el teorema fundamental marxiano debe -debiera- tener al salario como variable explícita fundamental. Yo mismo -con perdón- tengo unas notas[144] sobre el teorema con conclusiones novedosos, pero obtenidas al igualar ganancias con plusvalías directamente sin coeficientes de transformación. Cuando se opera así se obtiene el teorema fundamental y, a veces, algo más. Morishima da un rodeo mayor y parte de la hipótesis de la productividad de la matriz de requerimientos para poder aplicar el teorema de Perrón-Froebenius. A pesar de todo, el planteamiento de Morishima nos lleva a una sorpresa, como veremos. Veamos primero -aunque sea para dar algo de emoción a un tema no exento de dificultades formales- un modelo alternativo al de Okishio y Morishima.

Alternativa al teorema fundamental marxiano

El problema que se plantea es cómo relacionar la tasa de ganancia de la ecuación que define el sistema económico con la tasa de explotación que define el valor de las mercancías según el esquema marxista. Partimos, con Marx, de la ecuación que define el valor de las mercancías en términos de valor-trabajo[145]:

---

[143] El teorema lo recoge Pasinetti en su conocido libro *Lecciones de teoría de la producción*.

[144] *Notas sobre el teorema fundamental marxiano*: http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm

[145] Aunque en este trabajo apenas se discuten conceptos doy aquí la definición de valor-trabajo de Marx: *"Lo que determina la magnitud de valor de un objeto no es más que la cantidad de trabajo socialmente necesario, o sea, el tiempo de trabajo socialmente necesario para su producción"*. Más adelante explica lo de *socialmente necesario*. El Capital, FCE, I tomo, pág. 7. En el tomo III, pág. 100

(3) $$K_i + V_i + S_i = V_{f\,i} Y_i$$ para ***i***=1 a ***n***

siendo $\boldsymbol{K}_i$ el capital constante[146], $\boldsymbol{V}_i$ el capital variable y $\boldsymbol{S}_i$ la plusvalía de la mercancía ***i*** o producida en el sector ***i*** en términos de valor-trabajo, $\boldsymbol{V}_f$ el valor-trabajo (unitario) de la mercancía ***i*** e $\boldsymbol{Y}_i$ la cantidad producida de la mercancía en términos físicos. Este valor (3) ha de trasformarse en unidades monetarias mediante unos coeficientes $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{c}_i$, μ_i con las ecuaciones de transformación que hay en (4):

(4) $$a_i K_i + b_i V_i + c_i S_i = \mu_i V_{f\,i} Y_i = p_i Y_i$$ para ***i***=1 a ***n***

En términos matriciales la ecuación (4) sería:

(5) $$\underset{1xn}{A}\,\underset{nxn}{K} + \underset{1xn}{B}\,\underset{nxn}{V} + \underset{1xn}{C}\,\underset{nxn}{S} = \underset{1xn}{\mu}\,V_f\,\underset{nxn}{Y} = \underset{1xn}{p}\,\underset{nxn}{Y}$$

(5bis)

$$[a_1 \Lambda\ a_n] \times \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \mathrm{O} & \\ & & K_n \end{bmatrix} + [b_1 \Lambda\ b_n] \times \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \mathrm{O} & \\ & & V_n \end{bmatrix} + [c_1 \Lambda\ c_n] \times \begin{bmatrix} S_1 & & \\ & \mathrm{O} & \\ & & S_n \end{bmatrix} =$$

$$= [\mu_1 \Lambda\ \mu_n] \times \begin{bmatrix} \Delta_1 & & \\ & \mathrm{O} & \\ & & \Delta_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \mathrm{O} & \\ & & y_n \end{bmatrix} = [p_1 \Lambda\ p_n] \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \mathrm{O} & \\ & & y_n \end{bmatrix}$$

donde ***A***, ***B***, ***C*** son vectores fila ***1***x***n*** de los coeficientes y ***K***, ***V***, ***S*** son matrices diagonales de los capitales constante, variable y de la plusvalía, respectivamente, con valores nulos para ***i*** distinto de ***j***.

Para esta transformación, Marx explicitó dos condiciones, aunque a veces habla de una tercera. Estas dos condiciones son: 1) que la plusvalía total de todos los sectores fuera igual a las ganancias totales; 2) que las tasas de plusvalía de todos los sectores (o mercancías) fueran iguales. En otras ocasiones habla de que el valor total de la producción de todos los sectores fuera igual en términos de valor-trabajo (unitario) y en términos de precio[147]. Estas son las dos ecuaciones que definen las condiciones primeras de Marx:

---

lo matiza de nuevo Marx diciendo: *"El valor de la mercancía se determina por el tiempo de trabajo <u>necesario</u> contenido en ellas y no por el tiempo de trabajo que en ellas se encierra".*

[146] Aunque utilizo la ***K*** para no confundir con el coeficiente ***c*** que utilizo para la plusvalía, aquélla no representa al capital neoclásico sino al capital constante marxiano.

[147] Hemos heredado una confusión que viene más del idioma que de los conceptos. Cuando se habla de valor de una mercancía estamos hablando de *valor unitario*, equivalente al precio en términos monetarios. Sin embargo, en los ejemplos de Marx habla del valor de la producción, que sería equivalente a los ingresos, porque sería precio por la cantidad. Por eso la expresión transformación de valores a precios es confusa. Aquí entendemos los valores ***K***, ***V***, ***S***, como el valor de la producción de un tipo de mercancía equivalente en términos de precios a ***pY*** (ingresos), cosa que se desprende implícitamente de las ecuaciones de Morishima.

(6) $$\underset{1xn}{C}\ \underset{nxn}{S}\ \underset{nx1}{I} = g\left[\underset{1xn}{w\,L} + \underset{1xn}{p}\ \underset{nxn}{X}\right]\underset{nx1}{I}$$

siendo ***I*** el vector de unos ***n*x*1***.

(7) $$e = \frac{S_i}{V_i} \quad \Rightarrow \quad \underset{nxn}{S} = e\underset{nxn}{V}$$ para todo ***i*** = ***1*** a ***n***

Sin embargo, la ecuación (6) no será necesaria (ni conveniente) para lo que viene. Traemos ahora a colación la ecuación que define el sistema económico con salarios pre-factum o, más correctamente dicho, con la tasa de ganancia incluyendo todos los costes. Esta ecuación define el sistema sraffiano y vamos a apoyarnos en ella y en *la razón-patrón* de Sraffa ***R***. La ecuación es:

(8) $$\underset{1xn}{p}\ \underset{nxn}{Y} = (1+\underset{1x1}{r})\left[\underset{1x1}{w}\,\underset{1xn}{L} + \underset{1xn}{p}\ \underset{nxn}{X}\right]$$

De (8) se obtiene la ecuación marcada por la *razón-patrón* ***R*** haciendo la tasa de salarios ***w*** igual a cero:

(9) $$pY = (1+R)\,pX$$

De las ecuaciones (8) y (9) sale que:

(10) $$p = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}$$

De las ecuaciones (5), (7) y (10) se da el paso trascendente de eliminar los precios y se obtiene a su vez:

(11) $$\left[AK + BV + eCV\right] = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}Y$$

Vamos ahora a pos-multiplicar (11) por el vector de unos **I** de dimensión ***n*x*1*** para convertir los dos lados de la ecuación en sendos escalares; llamaremos ***f*** a $f = LX^{-1}Y$ por cuestiones de comodidad y tendremos:

(12) $$\left[AK + BV + eCV\right]\underset{nx1}{I} = \frac{w(1+r)}{R-r} \times \underset{1xn}{f}\ \underset{nx1}{I}$$

Y de (12) se obtiene la tasa de ganancia ***r***:

(13) $$\boxed{r = R \times \frac{\left[AK + BV + eCV\right] I - wf\ I}{\left[AK + BV + eCV\right] I + wf\ I}}$$

(13bis) $$r = R \times \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i K_i + \sum_{i=1}^{n} b_i V_i + \sum_{i=1}^{n} e c_i V_i - w \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n} a_i K_i + \sum_{i=1}^{n} b_i V_i + \sum_{i=1}^{n} e c_i S_i + w \sum_{i=1}^{n} l_i \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{ij}}{x_{ij}}}$$ con $\boldsymbol{y}_{ij}=0$ si ***i***<>***j***

¡Y la sorpresa es mayúscula porque en (13), aun cuando la tasa de explotación (de plusvalía) ***e*** *sea cero, la tasa de ganancia* ***r*** *es positiva!* Y esto se ha conseguido sólo con el supuesto primero de Marx[148]. También ocurre en (13) que si la tasa de salario ***w*** es cero, la tasa de ganancia ***r*** es igual a ***R***, es decir, la tasa de ganancia marxiana alcanza la razón-patrón de Sraffa (***r***=***R***). Más aún, para que la tasa de ganancia ***g*** sea mayor que cero ha de ocurrir que los salarios ***w*** queden por debajo de:

(14) $$w < R \times \frac{\left[AK + BV + eCV\right] I}{f\ I}$$

Y si la tasa de explotación ***e*** es cero, aún es positiva la tasa de ganancia ***g*** con tal de que los salarios queden por debajo de:

(15) $$w < R \times \frac{\left[AK + BV\right] I}{f\ I}$$

Vemos así que los salarios (la tasa de salarios ***w*** en el modelo) juegan un papel decisivo porque, para niveles bajos de salarios, las ganancias pueden ser positivas aun cuando la tasa de explotación marxiana sea cero. A partir de un cierto nivel de salarios (marcado por (15)), para que las ganancias sean positivas debe haber explotación (***e***>0). Esto está acorde con lo que recoge Morishima del teorema de Okishio al hablar de "*condición necesaria y suficiente que se de un tipo de salarios reales*". Al no hacer explícitos los salarios y hacer depender la tasa de explotación *sólo* de la jornada de trabajo, el modelo de Morishima lleva a la conclusión necesaria y suficiente del teorema de explotación de Okishio. En otro epígrafe discutiremos el tema con más profundidad. Volviendo a (14) y (15), todo esto se puede resumir en:

(16) $$0 < w < R \times \frac{\left[AK + BV\right] I}{f\ I} < R \times \frac{\left[AK + BV + eCV\right] I}{f\ I}$$

La (16) cumple las fases que recorre la tasa de salarios ***w*** para que la tasa de ganancia ***g*** sea positiva. La ecuación (13) nos dice *que la condición <u>suficiente</u> para que exista una tasa de ganancia positiva es que la tasa de explotación sea positiva,* pero nada dice de la condición necesaria. Esta aparecerá siempre que se igualen directamente *las tasas* de plusvalía (en términos de valor) con *las tasas de* ganancia (en términos monetarios) sin pasar por *las horcas caudinas* de los coeficientes de transformación. Y, por cierto, sin Sraffa no hubiéramos llegado a esto porque no

[148] Que ni siquiera sería necesario una sola tasa de explotación, sino ***n*** tasas de explotación (de plusvalía).

hubiéramos podido eliminar los precios. Mi pronóstico es que con el tiempo no se podrá actualizar a Marx sin pasar por el tamiz del italiano.

Otra sorpresa, aunque no tanta, es la de la posibilidad de tasa de plusvalía negativa y, sin embargo, compatible con una tasa de ganancia positiva en (13). Ya lo contempla Steedman[149], pero lo achaca a la definición de valor de Marx, lo cual resulta sorprendente, porque si no se admite las ideas de Marx sobre la teoría del valor, simplemente, no existe plusvalía. Señala además que puede darse este fenómeno cuando haya producción conjunta, pero no es necesario. En (13) se ve que puede darse con producción conjunta y simple. Sin embargo, que se de la posibilidad matemática no significa que tenga sentido económico una plusvalía negativa. La plusvalía, según Marx, es el trabajo que realiza el asalariado más allá de lo que necesita para vivir él y su familia en condiciones históricas dadas. Puede haber acortamiento de la jornada de trabajo por obra de su labor de resistencia colectiva y con ello acortar los beneficios a las empresas y empresarios, pero el trabajo excedente, por definición, no puede ser menor que cero. Otra cosa es que estemos en un sistema de precios: ahí puede pasar cualquier cosa. Es decir, lo contrario de lo que dice Steedman.

Epílogo

A modo de epílogo querría señalar que Sraffa -al igual que Keynes o Kalecki- nos han abierto un mundo alternativo o distinto al marginalismo. Sraffa sigue la tradición de Smith, Ricardo, Malthus, Mill, etc., es decir, los clásicos y los fisiócratas. Podemos incluir incluso parte de Marshall, a pesar de que el análisis de las leyes de oferta y demanda en pie de igualdad, con su metáfora de las tijeras[150], es ingenua y muy criticada, y a pesar de los defectos del análisis parcial cuando se quiere agregar para llegar a un modelo general[151]. La realidad es que ambas -oferta y demanda- son apenas un esquema trivial que sólo la sociología del comportamiento económico puede profundizar. Con el marginalismo -al menos el que aún se enseña en los cursos de licenciatura- la realidad se ha ido por el desagüe; el marginalismo no da soluciones al problema de las crisis y de los ciclos, por ejemplo; las expectativas no son racionales, menos aún los mercados; la valoración en el margen para asignar recursos y consumos es una entelequia. La economía, o es una sociología o no es nada, meras fórmulas y gráficos. Volviendo a Sraffa, sus modelos tienen la ventaja de que no hay que suponer funciones producción, ni agregación en términos de valor de medios de producción (el capital neoclásico); que los procesos son discontinuos, sin que sean significativos las variaciones en el margen; que los precios se determinan conjuntamente con salarios y ganancias y no a partir de productividades marginales que ningún empresario sabe o entiende -o podría calcular aunque las supiera- cuando paga el salario o se queda con los beneficios; que el sistema es abierto y ninguna explicación sobre supuestas funciones hipotéticas de producción van a fijar salarios y ganancias, sino que estos se determinan sociológicamente (conflictos, relación de fuerzas, lucha de clases, según los gustos analíticos); que las mejoras del bienestar vienen determinados por el aumento de la relación entre productos netos y medios

---

149 *Marx after Sraffa, 1977.*

150 *Principios de Economía*, pág. 398, Editorial Síntesis, S.A.

151 La paradoja de la agregación que se pone de manifiesto en el modelo keynesiano cuando se puede dar un equilibrio con paro indeseado. Esta paradoja no puede ser advertida con agregaciones de valores, precios o productos, obtenidos a partir del análisis parcial.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

empleados. Son sólo algunas de las características -en comparación con el marginalismo- que se desprenden de los modelos explicativos de raíz *esrafiana.*

Bibliografía

Afriat, S.: "Sraffa´s Prices", Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474. www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: "Distribución, precios de producción y crecimiento", 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Ahijado, M.: "Piero Sraffa: notas para una biografía intelectual, 1985, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Barceló, A. y Sánchez, J.: "Teoría económica de los bienes autorreproducibles", Edit. Oikos-Tau, 1988.

Bour, Enrique A.: "Marx y la teoría económica moderna", 2007 http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf

Caballero, A. y Lluch, E.: "Sraffa en España", Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: "Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Desai, M.: "Marxian Economic Theory", 1974 ["Lecciones de teoría económica marxista", 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: "The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution", 1970.

Estrin, S. y Laidler, D: "Introduction microeconomics".

Fiorito, Alejandro: "La implosión de la economía neoclásica". Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: "Sraffa y Böhm-Bawerk". Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Garegnani, P.: "El capital en la teoría de la distribución", 1982, ed. Oikos-Tau ("Il capitale nelle teorie delladistribuzone", 1982)

Garegnani, P.: "Heterogeous Capital, The Production Function and the Theory Distribuction", 1970

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: "Sraffa on von Bortkiewicz". Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del Capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions funtions”.

Korsch, Karl; “Karl Marx”, 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: “Piero Sraffa: The Man and the Scholar”, Routledge, 2008.

Kurz D. Heinz; “Critical Essays on Piero Sraffa´s Legacy in Economics”, 2000, Cambrigde University Press.

Lange, O., Taylor, F. M.: “On tthe Economic Theory of Socialism, 1938 [Sobre la teoría económica del socialismo, 1971, edit. Ariel]

Marsahll, Alfred: “Principios de Economía, Fundación ICO, 2005 [Principles of Economy, 1890]

Marx, Carlos: “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.: “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961.

Mendoza, Gabriel: “La transformación de valores en precios de producción”, 1997 http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: “Aspectos de la economía de Sraffa”, revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Mora Plaza, A.: “Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf;

Mora Plaza, A.: “Sobre la transformación de valores a precios”: http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm
http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF

Mora Plaza, A.: “Notas sobre el teorema fundamental marxiano”
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”. http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: “Piero Sraffa”.
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Neri, Salvador: "Besicovitch, Sraffa and the existence of Standard Commodity", 2010: http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf

Nuti, D.: "Capitalism, Socialism and Sleady Growth", 1970.

Okishio, N.: "A mathematical note on marxian theorems", 1963.

Pasinetti. L.: "Critical of the neoclassical theory of growth and distribution". Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: "Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations", 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", 1961/2.

Pasinetti, L.: "Switches of technique and the rate of return in Capital Theory", 1969.

Pasinetti, L.: "Crecimiento económico y distribución de la renta" ("*Growth and Income Distribution*", 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción" ("Lezioni di teoria della produzioni", 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: "Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta", 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: "Piero Sraffa", 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación" (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: "Ensayos críticos", 1984, Ediciones Orbis.

Roncaglia, Alessandro: "Piero Sraffa", Edit. Palgrave MacMillan, 2009.

Roncaglia, Alessandro: "La riqueza de las ideas", Prensas Universitarias de Zaragoza, 2009 ("The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought", Cambridge University Press, 2005).

Roncaglia, Alessandro: "Sraffa and the Theory of Prices", 1978 [Sraffa e la teoria dei prezzi, 1975]

Samuelson, Paul: "Understanding the Marxian notion of Exploitation", 1971.

Sánchez Choliz, Julio: "La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico", 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII.
ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schefold, Bertram: “Mr. Sraffa on Joint Production”, 1971

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Serrano, Franklin: “Histérisis, Dinámica inflacionaria y el Supermultiplicador Sraffiano”, 2006: http://www.elgermen.com.ar/wordpress/wp-content/uploads/Serrano-F-Hist%C3%A9resis-Din%C3%A1mica-Inflacionaria-y-el-Supermultiplicador-Sraffiano.pdf

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Subiza Martínez, B.: “Juegos matriciales y su aplicación a la teoría Perron-Frobenius”, U. de Alicante; http://www.ine.es/revistas/estaespa/112_3.pdf

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Produción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.

$$p_j y_j = w\, l_j + (1+r)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$p_j y_j = (1+R)\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} = 1$$

$$\sum_{1}^{n} l_j = 1$$

mercancía patrón

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231